УДК 537.31

НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ВЫНУЖДЕННЫХ ЧЕРЕНКОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И КОМПТОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ В ПЛАЗМЕ

М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе

В трехволновом приближении рассмотрены вынужденные процессы в электронной плазме: черенковское излучение нерелятивистским электронным пучком продольных колебаний и комптоновское рассеяние поперечной электромагнитной волны в плазме с возбуждением квантовой моды (волна де Бройля). Обсуждается возможность проявления квантовых колебаний.

Ключевые слова: вынужденное черенковское излучение, вынужденное рассеяние, квантовые колебания, дисперсионное уравнение, волна де Бройля.

1. Высокочастотные квантовые колебания в плазме. Применимость кинетических уравнений с самосогласованным полем (в классическом случае это уравнение Власова для функции распределения, а в квантовом – уравнение Вигнера) было обосновано Н. Н. Боголюбовым в своем знаменитом труде [1]. Условие применимости в случае электронного газа сводится к виду

$$e^2 n^{1/3} << \epsilon_0, \tag{1.1}$$

где e – заряд электронов, n – их плотность, а ϵ_0 – средняя энергия их хаотического движения, равная температуре электронов T_e для невырожденного газа, либо энергии Ферми $\epsilon_F = (3\pi^2)^{3/2}\hbar^2 n^{2/3}/2m$ в случае вырожденного газа ($\hbar$ – постоянная Планка).

Исследуемые нами процессы вынужденных черенковского излучения и комптоновского рассеяния в квантовой плазме определяются высокочастотным диэлектрическим откликом на электромагнитное поле. Поэтому выпишем здесь продольную и поперечную диэлектрические проницаемости квантовой электронной плазмы [2] (см. также [3])

$$\epsilon^l(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2 - \omega_k^2}, \quad \epsilon^{tr}(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}. \tag{1.2}$$

Учреждение Российской академии наук Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, 119991 Москва, ул. Вавилова, 38, Россия.

Здесь ω и k – частота и волновой вектор электромагнитных возмущений,

$$\omega_k = \frac{k^2}{2m}\hbar \tag{1.3}$$

– одночастичный спектр колебаний электронов (собственная частота уравнений Шредингера для электрона – спектр частот волны де Бройля), а $\omega_{Le} = \sqrt{4\pi e^2 n/m}$ – ленгмюровская частота, характеризующая взаимодействие электронов посредством самосогласованного поля.

Выражения (1.2) справедливы только в высокочастотном пределе, когда выполнены условия

$$\omega \pm \omega_k >> k\nu_0 = k\sqrt{2\epsilon_0/m}. \tag{1.4}$$

Их следует учитывать при анализе спектров колебаний.

Выражение для высокочастотной поперечной диэлектрической проницаемости не содержит квантового члена, а следовательно, и спектр поперечных электромагнитных волн такой же как и в классическом пределе [2, 4]. Спектр же продольных волн, определяемый нулями диэлектрической проницаемости, дается выражением

$$\omega = \pm\sqrt{\omega_{Le}^2 + \omega_k^2}. \tag{1.5}$$

Именно эта формула для спектра квантовых колебаний приведена в работе [2]. Однако не указаны условия, когда квантовая поправка в виде (1.5) справедлива. Эти условия следуют из неравенств (1.1) и (1.4) и записываются в виде

$$\epsilon_0 >> \hbar\omega_{Le} >> \epsilon_0. \tag{1.6}$$

Противоречивость (несовместимость) этих условий свидетельствует о невозможности проявления квантовых эффектов в спектре (1.5); квантовая поправка в (1.5) меньше не учтенной классической тепловой поправки.

Следует заметить, что в ряде работ (см. [5], где можно найти подробную библиографию) исследовались квантовые спектры колебаний электронной плазмы как с использованием квантового кинетического уравнения [2], так и использованием квантовой гидродинамики [3]. В этих работах, однако, не оговорились условия применимости полученных результатов. Нам представляется, что многие результаты выходят за рамки условий их применимости. Первые работы, в которых такие условия оговорены и показано, когда квантовые эффекты могут проявиться, это работы [6–8]. В них исследованы линейная и нелинейная стадии вынужденного черенковского излучения электронных пучков в плазме в квантовом пределе. Изложенное ниже частично заимствовано из этих работ.

2. Вынужденное черенковское излучение нерелятивистского электронного пучка в плазме с возбуждением квантовой моды. Рассмотрим задачу возбуждения нерелятивистским моноэнергетическим электронным пучком продольных колебаний в плотной холодной электронной плазме. Плотную плазму будем рассматривать классически, а электронный пучок, учитывая его малую плотность, – квантово. В этих условиях дисперсионное уравнение плазма-пучкового взаимодействия, или, что тоже самое, вынужденного черенковского излучения электронным пучком продольных плазменных волн, записывается в виде

$$1 + \delta\epsilon_b^l + \delta\epsilon_p^l = 1 - \frac{\omega_b^2}{(\omega - \vec{k}\vec{u})^2 - \omega_k^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0. \tag{2.1}$$

Здесь $\vec{u}$ – скорость электронов пучка, ω_b и ω_p – ленгмюровские частоты электронов пучка и плазмы, соответственно, причем считается, что $n_p >> n_b$. Величина ω_k – определена выше.

Уравнение (2.1) по виду совпадает с дисперсионным уравнением плазма-пучкового взаимодействия в классическом случае в условиях, когда пучок замагничен ($\omega_k \to \omega_H = \dfrac{eB_0}{mc}$, где B_0 – продольное магнитное поле), а плазма нет (см. [4]). При этом отсюда следует два механизма резонансного взаимодействия пучка с плазменной волной

$$\omega = \omega_p = \vec{k}\vec{u} \pm \omega_k, \tag{2.2}$$

отвечающие нормальному и аномальному эффектам Доплера, соответственно. Неустойчивость с возбуждением продольной плазменной волны имеет место при аномальном эффекте Доплера (нижний знак в (2.2)). При этом уравнение (2.2) определяет два резонансных значения волнового вектора

$$k_1 = 2mu_\parallel/\hbar, \quad k_2 = \omega_p/u_\parallel, \tag{2.3}$$

где $u_\parallel$ – составляющая скорости пучка вдоль волнового вектора $\vec{k}$. При получении (2.3), также как и в [5], предполагалось выполненным неравенство

$$\mu = \frac{\hbar\omega_p}{mu_\parallel^2} << 1. \tag{2.4}$$

Как следствие, первый корень (квантовый) большой, а второй (классический) маленький. Заметим, кстати, что неравенство (2.4) с учетом (1.1) для плотной плазмы эквивалентно требованию, чтобы скорость пучка превосходила скорость теплового разброса электронов плазмы.

Далее, из уравнения (2.1) при выполнении резонанса аномального эффекта Доплера находим инкременты развития неустойчивости ($\omega \to \omega + \delta$)

$$\delta_{1,2} = \left(\frac{\omega_b^2 \omega_p}{4\omega_{k1,2}}\right)^{1/2}. \tag{2.5}$$

При получении этого выражения предполагалось, что $\delta_{1,2} << \omega_{k1,2}$ и в этом проявление квантовости. Очевидно, что возбуждаться будет квантовая мода с меньшим волновым числом $k_2 = \omega_p/u_\parallel$ и, соответственно, с меньшей частотой $\omega_{k2} = \hbar\omega_p^2/mu_\parallel^2$. Как следствие $\omega_{k2}/\omega_p = \mu << 1$, что и было замечено при выводе уравнения (2.1).

Перейдем теперь к вопросу о применимости полученных в этом разделе результатов. Заметим, что условие (1.1) сохраняет вид и в рассматриваемом случае, а условия (1.4) записываются в виде

$$\omega_{k1,2} >> \delta_{1,2} >> k_{1,2}\sqrt{2\epsilon_0/m}. \tag{2.6}$$

Неравенства (1.1) и (2.6) при учете выражений (2.5) сводятся к виду

$$1 >> \mu^3 \frac{n_b}{n_p} >> \frac{u^6}{\nu_F^6} \tag{2.7a}$$

для коротковолновой моды неустойчивости ($k = k_1$), и

$$1 >> \mu^3 >> \frac{n_b}{n_p} >> \mu \frac{v_0^3}{u_\parallel^3} \tag{2.7b}$$

для длинноволновой моды ($k = k_2$). Здесь v_0 – скорость теплового разброса электронов пучка.

Неравенства (2.7a) несовместимы, а поэтому возбуждение коротковолновой квантовой моды со спектром ω_{k1} в газовой электронной плазме в результате развития черенковской плазмы – пучковой неустойчивости невозможно. Длинноволновая же квантовая мода со спектром ω_{k2}, которая может возбуждаться при условиях (2.7b), вполне реализуема, правда при очень малых плотностях пучка и больших плотностях плазмы.

3. Вынужденное комптоновское рассеяние электромагнитной волны в плазме с возбуждением квантовой моды. Перейдем теперь к рассмотрению вынужденного комптоновского рассеяния поперечной электромагнитной волны на продольных колебаниях плотной плазмы с возбуждением квантовой моды. В линейном приближении такой процесс описывается дисперсионным уравнением трехволнового процесса – распада падающей поперечной волны на рассеянную поперечную волну и плазменную волну [4]

$$\epsilon^l(\omega, k) = \frac{\delta\epsilon^l(\omega,k)k^2}{4\omega_0^2}\left[\frac{[(\vec{k}_0 - \vec{k}) \times \vec{\nu}_E)]}{(\vec{k}_0 - \vec{k})^2}\left(\epsilon^{tr}(\omega_0 - \omega, \vec{k}_0 - \vec{k}) - \frac{c^2(\vec{k}_0 - \vec{k})^2}{(\omega_0 - \omega)^2}\right)^{-1}\right]. \tag{3.1}$$

Здесь $\epsilon^{l,tr}(\omega,k)$ – даются выражениями (1.2), причем ω_0 и $\vec{k}_0$ – частота и волновой вектор падающей волны, $\omega_s = \omega_0 - \omega$ и $\vec{k}_s = \vec{k}_0 - \vec{k}$ – то же для рассеянной волны, ω и $\vec{k}$ – частота и волновой вектор продольной плазменной волны, возбуждаемой в процессе рассеяния, а $\vec{\nu}_E = e\vec{E}_0/m\omega_0$, где $\vec{E}_0$ – амплитуда падающей волны накачки.

Из уравнения (3.1) видно, что резонансное рассеяние имеет место при выполнении условий трехволнового распада

$$\omega_0 = \omega_s + \omega, \quad \vec{k}_0 = \vec{k}_s - \vec{k}. \tag{3.2}$$

В дальнейшем мы ограничиваемся высокочастотным рассеянием, когда ω_0 и ω_s намного превосходят плазменную частоту ω_{Le} и плазма прозрачна для падающей и рассеянной волн. Именно такой случай вынужденного рассеяния изложен в [4] для классического предела $\omega >> \omega_k$. С учетом квантовой моды уравнение (3.1) для высокочастотного рассеяния записывается в виде

$$(\omega^2 - \omega_k^2 - \omega_{Le}^2)(\omega_s^2 - c^2k_s^2) = \frac{k^2\nu_E^2}{4}\omega_{Le}^2. \tag{3.3}$$

Это уравнение отличается от рассмотренного в работе [4] наличием квантовой частоты ω_k в первой скобке в левой части. Здесь мы рассмотрим то новое, что возникает при учете этой частоты. Именно, рассмотрим корень уравнения (3.3) в резонансных условиях

$$\omega = \omega_k + i\delta, \quad \omega_s = ck_s + i\delta, \quad \omega_k\delta >> \omega_{Le}^2. \tag{3.4}$$

При выполнении условий (3.4) для инкремента развития неустойчивости, соответствующей вынужденному комптоновскому рассеянию высокочастотной поперечной волны, на одночастотных квантовых колебаниях плазмы из (3.3) получим

$$\delta^2 = \frac{\omega_{Le}^2 k^2 \nu_E^2}{16\omega_k\omega_0}. \tag{3.5}$$

Отсюда видно, что инкремент δ не зависит от волнового вектора $\vec{k}$ и является чисто квантовой величиной (не допускает переход к классическому пределу $h \to 0$).

Наконец, обсудим условия применимости полученных в этом разделе результатов. Из неравенств $\omega_k >> \delta >> kv_0$ с учетом (2.4) получаем окончательное условие реализации вынужденного комптоновского рассеяния с возбуждением квантовой моды (волны де Бройля)

$$1 >> \sqrt{\frac{h\omega_{Le}}{\epsilon_0}} >> \frac{v_0}{\nu_E}\sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_{Le}}}. \tag{3.6}$$

Эти условия довольно жестки, но вполне выполнимы в случае сильных полей, когда $\nu_E >> v_0$, плотность плазмы довольна высока, так что ω_0 не намного превосходит ω_{Le}, а идеальность (т.е. условие (1.1)) на пределе.

4. Обсуждение результатов. Из приведенного выше анализа можно сделать следующие выводы:

1. В электронной плазме в отсутствие внешнего воздействия наблюдение квантовой моды колебаний (волны де Бройля) исключается условиями применимости (1.1) и (1.4), которые сводятся к взаимоисключающим неравенствам (1.6).

2. При инжекции в изотропную электронную плазму нерелятивистского электронного пучка возможно наблюдение вынужденного черенковского излучения с возбуждением квантовой моды. Условия реализации (2.7b) вполне выполнимы при малом отношении плотности пучка и плотности плазмы.

3. Реализуемы условия вынужденного комптоновского рассеяния высокочастотной поперечной электромагнитной волны с возбуждением квантовой моды в изотропной электронной плазме. Но и в этом случае плотность плазмы должна быть высокой, а поле падающей волны достаточно сильным.

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] Н. Н. Боголюбов, *Проблемы динамической теории в статистической физике* (М., Гостехиздат, 1946).

[2] В. П. Силин, А. А. Рухадзе, *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред* (М., Атомиздат, 1961).

[3] М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, УФН **169**(6), 400 (1999).

[4] А. Ф. Александров, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, *Основы электродинамики плазмы* (М., Высшая Школа, 1988); англ. издание: Springer,1984.

[5] П. К. Шукла, Б. Эльясон, УФН **180**(5), 55 (2010).

[6] М. В. Кузелев, Краткие сообщения по физике ФИАН, **36**(8), 13 (2009).

[7] М. В. Кузелев, Физика плазмы **36**(1), 132 (2010); Квантовая электроника **40**, 83 (2010).

[8] М. В. Кузелев, Квантовая электроника **40**, 33 (2010).

Поступила в редакцию 2 октября 2009 г.