

УДК 537.61

МАГНИТООПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФОТОННЫХ КРИСТАЛЛОВ

А. К. Звездин

Магнитооптические свойства материалов с периодически модулированными свойствами – фотонных кристаллов (или band-gap materials) рассмотрены с точки зрения возможности использования их для управления потоками электромагнитного излучения и параметрами фотонных кристаллов. Показано, что в магнитном поле, ориентированном в базисной плоскости 2D-фотонного кристалла, происходит конверсия мод $TE \leftrightarrow TM$ – эффект, аналогичный магнитооптическому эффекту Фарадея. Коэффициент конверсии мод возрастает при приближении частоты электромагнитных волн к граничным частотам разрешенных зон. Подобным образом ведет себя и относительный сдвиг фаз $\Phi_{\text{тв}}$ между TE - и TM -модами, возникающий в магнитном поле, ориентированном перпендикулярно базисной плоскости 2D-фотонного кристалла – эффект, аналогичный линейному магнитному двулучепреломлению в оптике.

Материалы с периодически модулированными оптическими свойствами – фотонные кристаллы – привлекают в последние годы большое внимание [1 – 5]. Основная идея, инициировавшая поток исследований в этой области, заключается в использовании математической аналогии между уравнением Шредингера, описывающим движение электрона в кристалле, и уравнениями Максвелла для оптически периодической среды.

Основываясь на этой аналогии, были предсказаны материалы с оптической запрещенной зоной для фотонов [1, 2]. Большой физический и практический интерес представляет эффект подавления спонтанной эмиссии света внутри запрещенной зоны и,

наоборот, возможности ее увеличения в разрешенных зонах. Этот эффект обусловлен, главным образом, модификацией плотности состояний фотонов в периодической среде по сравнению с вакуумом и предсказан еще в 1946 г. для оптического микрорезонатора (microcavity). Его называют эффектом Перселла [6].

Большое внимание уделяется вопросам прохождения и отражения электромагнитных волн в фотонных кристаллах [5, 9]; исследовались эффекты квантовой электродинамики [5], нелинейные эффекты [9].

В настоящей работе рассмотрено влияние магнитного поля на распространение электромагнитных волн в фотонном кристалле. Показано, что магнитное поле вызывает эффект конверсии TE - и TM -мод, который является аналогом известного эффекта Фарадея в традиционной оптике. Обсуждается эффект линейного магнитного двулучепреломления, возникающий в магнитном поле, ориентированном перпендикулярно направлению распространения волн. Магнитооптика фотонных кристаллов представляет большой физический и практический интерес, так как в этой области возникают новые возможности управления потоками электромагнитного излучения, а также параметрами фотонных кристаллов.

Рассмотрим диэлектрическую оптически неоднородную среду, характеризующую диэлектрической проницаемостью $\epsilon_{ij}(\mathbf{r}) = \delta_{ij}\epsilon(\mathbf{r})$. Функция $\epsilon(\mathbf{r})$ является периодической функцией координат, т.е.

$$\epsilon(\mathbf{r} + \mathbf{a}_i) = \epsilon(\mathbf{r}), \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где $\{\mathbf{a}_i\}$ – элементарные векторы решетки фотонного кристалла.

Влияние магнитного поля будем учитывать при помощи вектора поляризации [10, 11]:

$$\mathbf{P}_m(\mathbf{r}) = i\epsilon_0\epsilon(\mathbf{r})Q(\mathbf{r})[\mathbf{m}, \mathbf{E}], \quad (2)$$

где $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$, $Q(\mathbf{r})$ – магнитооптический параметр или параметр Фойгта, диэлектрического материала, пропорциональный внешнему магнитному полю \mathbf{B}_{ext} ($Q \ll 1$); \mathbf{m} – единичный вектор вдоль магнитного поля (или намагниченности). Будем предполагать также, что относительная магнитная проницаемость среды $\mu = 1$, тогда уравнения Максвелла представляются в виде:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0\epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E} + \mathbf{P}_m(\mathbf{r}, t)),$$

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t),$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{H}) = 0, \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \{ \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E} + \mathbf{P}_m(\mathbf{r}, t) \} = 0,$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Вб/м}^2$.

Обычно в теории фотонных кристаллов используют в качестве "основного" поля поле \mathbf{H} , тогда после исключения электрического поля из системы (3) получается уравнение для поля $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ (при $P_m = 0$, $\mathbf{E} \approx \mathbf{H} \sim e^{-i\omega t}$):

$$\hat{\mathcal{L}}_H \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{H}, \quad (4)$$

где

$$\mathcal{L}_h = \vec{\nabla} \times \left\{ \frac{1}{\epsilon(\mathbf{r})} \vec{\nabla} \times \mathbf{H} \right\} \quad (5)$$

является линейным эрмитовым оператором, поэтому при исследовании (3) можно использовать хорошо разработанный математический аппарат квантовой механики.

В рамках поставленной задачи удобнее работать с электрическим полем $E(\mathbf{r})$. Исключая $H(\mathbf{r})$ из (3), получим

$$\mathcal{L}_E \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon(\mathbf{r})} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2 \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r})} \mathbf{P}_m(\mathbf{r}). \quad (6)$$

Линейный оператор \mathcal{L}_E не эрмитов, но уравнение (6) можно "эрмитизировать", переходя к новым переменным $\vec{\Psi}(\mathbf{r}) = \sqrt{\epsilon(\mathbf{r})} \mathbf{E}(\mathbf{r})$ [5]. Тогда уравнение (6) можно записать в виде:

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \hat{\mathcal{H}} \right) \vec{\Psi}(\mathbf{r}) = 0, \quad (7)$$

где

$$\hat{\mathcal{H}} \vec{\Psi} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon(\mathbf{r})}} \vec{\nabla} \times \left\{ \vec{\nabla} \times \frac{1}{\sqrt{\epsilon(\mathbf{r})}} \vec{\Psi}(\mathbf{r}) \right\} - \frac{i\omega^2}{c^2} Q(\mathbf{r}) \mathbf{m} \times \vec{\Psi}(\mathbf{r}) \equiv (\mathcal{H}_0 + \hat{V}) \vec{\Psi} \quad (8)$$

и возмущением \hat{V} является второе слагаемое в (8). Важным свойством уравнений (8) (а также (3)) является их ковариантность относительно масштабных преобразований, что позволяет переносить результаты исследования фотонных кристаллов, полученные

в одном диапазоне частот, на другие диапазоны и другие соответствующим образом сконструированные кристаллы.

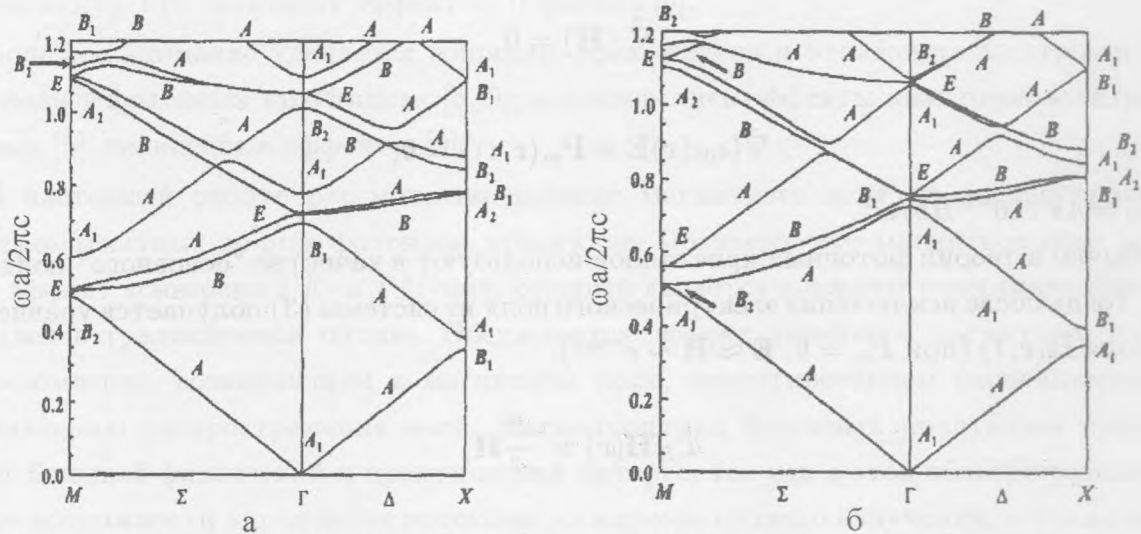


Рис. 1. Зонные диаграммы для 2D-фотонного кристалла с квадратной элементарной ячейкой в базисной плоскости (C_{4v} -симметрия). а – период структуры, A_i – четные моды, B_i – нечетные моды, E – двукратно вырожденные моды, $\Gamma, X, M, \Delta, \Sigma$ – экстремальные точки зоны Бриллюэна; (а) – ТЕ-мода, (б) – ТМ-мода [5].

Легко убедиться, что операторы $\mathcal{H}, \mathcal{H}_0, V$ являются эрмитовыми. Оператор \mathcal{H}_0 достаточно хорошо изучен в работах [5]. Собственными функциями оператора \mathcal{H}_0 являются векторные функции Блоха (или Флоке) $\vec{\Psi}_{nk} = \mathbf{u}_{nk}(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}-i\omega t}$, где \mathbf{k} – квазиимпульс фотона, n – номер соответствующей волновой зоны; $\mathbf{u}(\mathbf{r} + \mathbf{a}_i) = \mathbf{u}(\mathbf{r})$. Соответствующие собственные значения $\omega_n(\mathbf{k})$ образуют ”полосатый” спектр (рис. 1) с чередующимися разрешенными и запрещенными зонами. Мы будем полагать, как обычно, вектор \mathbf{k} принадлежащим первой приведенной зоне Бриллюэна. Эти свойства собственных функций и собственных значений хорошо известны в физике кристаллов (см., например, [12]) и являются следствием периодической структуры оператора $\mathcal{H}_0(\mathbf{r})$.

Характерным свойством фотонного кристалла является то, что функции $\vec{\Psi}_{nk}(\mathbf{r})$ подразделяются на два типа: квазипродольные моды $\vec{\Psi}_{nk}^L(\mathbf{r})$ и квазиперечные $\vec{\Psi}_{nk}^T(\mathbf{r})$. Первые $\vec{\Psi}_{nk}^L(\mathbf{r})$ определяются как [5]:

$$\vec{\Psi}_{nk}^L(\mathbf{r}) = c\sqrt{\epsilon(\mathbf{r})} \frac{\mathbf{k} + \mathbf{b}_n}{|\mathbf{k} + \mathbf{b}_n|} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{b}_n)\mathbf{r}}, \quad (9)$$

где \mathbf{b}_n – вектор обратной решетки, c – нормировочная константа. Легко видеть, что

$$\vec{\nabla} \times \vec{\Psi}_{nk}^L = 0,$$

откуда следует, что

$$\hat{\mathcal{H}}_0 \vec{\Psi}_{nk}^L = 0, \quad (10)$$

т.е. квазипродольным модам соответствует собственное значение, равное 0. Следует заметить, что $\vec{\nabla} \sqrt{\epsilon} \vec{\Psi}_{nk}^L \neq 0$, т.е. моды $\vec{\Psi}_{nk}^L$ не являются реально существующими полями, но они важны с математической точки зрения, так как без них система функций $\vec{\Psi}_{nk}(\mathbf{r})$ не является полной.

Поперечные моды $\vec{\Psi}_{nk}^T(\mathbf{r})$ удовлетворяют уравнению

$$\hat{\mathcal{H}}_0 \vec{\Psi}_{nk}^T(\mathbf{r}) = \frac{\omega_{kn}^2}{c^2} \vec{\Psi}_{nk}^T(\mathbf{r}). \quad (11)$$

Они соответствуют реальным электромагнитным волнам ($\text{div} \sqrt{\epsilon} \vec{\Psi}_{nk}^T = 0$).

Функции $\vec{\Psi}_{nk}(\mathbf{r})$ образуют полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве оператора $\hat{\mathcal{H}}_0$ (и \hat{V}). Хотя функции (9) не ортогональны друг другу, но их можно ортогонализировать, используя известную процедуру Шмидта. Зная собственные функции и собственные значения оператора $\hat{\mathcal{H}}_0$, легко построить его запаздывающую функцию Грина, которая в данном случае имеет вид:

$$G_{ij}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \frac{c^2}{V} \sum_{nk} \frac{\Psi_{ink}^T(\mathbf{r}) \Psi_{jnk}^T(\mathbf{r}')}{(\omega + i\delta)^2 - \omega_{nk}^2} + \frac{\Psi_{ink}^L(\mathbf{r}) \Psi_{jnk}^L(\mathbf{r}')}{(\omega + i\delta)^2}, \quad (12)$$

где $\delta \rightarrow 0$, V – объем фотонного кристалла. Функция Грина позволяет свести основное уравнение (7) к интегральному:

$$\Psi_i = \Psi_i^0 + \int dr' G_{ij}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) V_{jk}(\mathbf{r}') \Psi_k(\mathbf{r}'), \quad (13)$$

которое решается методом итераций, используя малый параметр Q . С другой стороны, модифицированный магнитным полем энергетический спектр фотонного кристалла естественно определяется полюсами функции Грина уравнения (7), которая задается уравнением

$$G(\omega) = G^0(\omega) + \langle G^0(\omega) \cdot V \cdot G(\omega) \rangle, \quad (14)$$

где символом $\langle \dots \rangle$ обозначается свертка по координатам. Это уравнение также решается методом итераций. При взятии свертки интегрирование ведется по элементарной ячейке фотонного кристалла.

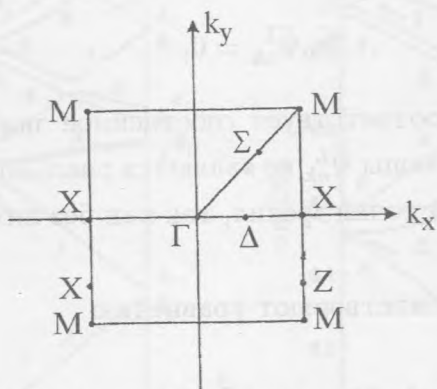


Рис. 2. Первая зона Бриллюэна и экстремальные точки 2D квадратной решетки.

Оставляя анализ уравнений (13, 14) для будущего, в данной работе мы ограничимся рассмотрением магнитооптических эффектов в районе экстремальных (высокосимметричных) точек зоны Бриллюэна (Γ , X , M и др. (рис. 2)), в которых закономерности распространения света кардинально отличаются от таковых в случае пространственно однородных сред. Кроме отмеченной выше трансляционной симметрии фотонный кристалл может обладать симметрией относительно поворотов C_2 , C_3 , C_4 , C_6 , зеркальных отражений и инверсии.

Совокупность таких конечных операций симметрии, переводящих фотонный кристалл в самого себя, вместе с операцией E -тождественного преобразования, составляет точечную группу G фотонного кристалла. Это означает, что для любого R , принадлежащего точечной группе G ($\forall R \in G$), имеет место равенство

$$R\epsilon(\mathbf{r}) \equiv \epsilon(R^{-1}, \mathbf{r}) = \epsilon(\mathbf{r}), \quad (15)$$

т.е. фотонный кристалл инвариантен относительно преобразований группы G .

Симметрия собственных функций фотонного кристалла относительно элементов симметрии его точечной группы очень важна для понимания его оптических свойств, в том числе и магнитооптических (подробности см., например, в [5, 12]). Рассмотрим этот вопрос на примере 2D-фотонного кристалла, оптические характеристики которого не зависят от координаты z , а в плоскости xy его структура характеризуется

квадратной элементарной ячейкой. Точечной группой такого кристалла является группа $C_{4v} = \{E, C_4, C_4^{-1}, C_2, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_d, \sigma'_d\}$, где C_2, C_4, C_4^{-1} – повороты вокруг оси z на $\pi, \pi/2$ и $-\pi/2$, соответственно; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_d, \sigma'_d$ – зеркальные отражения в плоскостях, проходящих через ось z и оси x, y , диагонали xu и $x-y$ квадрантов декартовой системы координат. Операторы группы G преобразуют также и векторы \mathbf{k} , принадлежащие зоне Бриллюэна. Каждый \mathbf{k} -вектор характеризуется своей $G_{\mathbf{k}}$ -группой, которая является подгруппой группы G . $G_{\mathbf{k}}$ -группа общей точки зоны Бриллюэна содержит только один тождественный элемент. Группы некоторых особых точек, занимающих симметричные позиции в зоне Бриллюэна, являются более содержательными. Так, в случае $2D$ -фотонного кристалла с группой C_{4v} имеет место следующая последовательность подгрупп:

$$G_{\Gamma} = G_M = C_{4v},$$

$$G_X = \{E, C_2, \sigma_x, \sigma_y\} \equiv C_{2v},$$

$$G_{\Delta} = \{E, \sigma_y\} \equiv C_{1h},$$

$$G_{\Sigma} = \{E, \sigma_x\} \equiv C_{1h}.$$

Из зонной теории кристаллов известно, что классификация собственных функций оператора \mathcal{H}_0 может быть произведена на основе неприводимых представлений $G_{\mathbf{k}}$ -групп.

Т а б л и ц а 1

Неприводимые представления и характеры для точечной группы C_{4v}

C_{4v}	E	$2C_4$	C_2	$2\sigma_v$	$2\sigma_d$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	1	-1
B_2	1	-1	1	-1	1
E	2	0	-2	0	0

Т а б л и ц а 2

Неприводимые представления и характеры для точечной группы C_{2v}

C_{2v}	E	C_2	σ_y	σ_x
A_1	1	1	1	1
A_2	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	-1
B_2	1	-1	-1	1

Т а б л и ц а 3

Неприводимые представления и характеры для точечной группы C_{1h}

C_{1h}	E	σ
A	1	1
B	1	-1

Таблицы 1–3 характеризуют эту возможность. В них буквами A и B обозначены одномерные представления и буквой E – двумерное. Одномерные представления относятся к невырожденным собственным модам, а двумерные – к двукратно вырожденным. Последние относятся только к точкам Γ и M зоны Бриллюэна.

Особенно большое значение имеют элементы зеркального отражения σ_i . Для $2D$ -фотонных кристаллов наличие зеркальных элементов в некоторых G_k -группах позволяет разделить собственные моды на два типа, отличающиеся четностью относительно отражения в данной плоскости: четные (A) и нечетные (B) моды. Этот факт очень важен, в частности, для установления правил отбора для процессов отражения и прохождения волн через фотонный кристалл, нелинейных процессов, исключения нефизических Ψ_{kx}^L -мод и др. Ниже он используется для вычисления матричных элементов оператора возмущения V в (7).

В случае $2D$ -фотонного кристалла дополнительная симметрия $z \rightarrow -z$ дает возможность разделить все моды на два типа: TE -моды (E_z, H_x, H_y) и TM -моды (E_x, E_y, H_z), каждая из которых, как отмечено выше, характеризуется дополнительно четностями относительно отражений в соответствующих вертикальных плоскостях.

При рассмотрении магнитооптических эффектов различают две основные геометрии эксперимента: а) продольная, или Фарадея, геометрия, когда электромагнитные волны распространяются вдоль внешнего магнитного поля, т.е. $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}$; б) поперечная, или Фойгта, геометрия, когда $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}$.

Здесь мы ограничимся магнитооптическими эффектами, которые проявляются вблизи экстремальных (симметричных) точек зоны Бриллюэна. При этом будем предполагать, что волновой пакет формируется в фотонном кристалле из функций Блоха $\vec{\Psi}_{\mathbf{n}\mathbf{k}}$, принадлежащих одной или двум (в зависимости от конкретной ситуации) волновым зонам, а вектор \mathbf{k} принадлежит достаточно малой окрестности вблизи особой точки. Это приближение подобно адиабатическому приближению в теории твердого тела и применимо при достаточно малой величине возмущения V .

Рассмотрим сначала *продольную геометрию* для $2D$ -фотонного кристалла. В качестве экстремальной точки выберем для определенности точку Γ зоны Бриллюэна (рис. 1, 2). Пусть квазиимпульс волны $\mathbf{k} \parallel \mathbf{x}^0 \parallel \mathbf{H}$. Функция $\vec{\Psi}_{\mathbf{n}\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ может быть в указанном выше приближении представлена в виде:

$$\vec{\Psi}_{\mathbf{n}\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = c_1 \Psi^{TE} \mathbf{e}_{TE} + c_2^L \Psi^L \mathbf{e}_L + c_2^T \Psi^{TM} \mathbf{e}_{TM}, \quad (16)$$

где

$$\vec{\Psi}^{TE}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}^{TE}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\omega t},$$

$$\vec{\Psi}^{TM}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}^{TM}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\omega t}, \quad (17)$$

$$\vec{\Psi}^L(\mathbf{r}) = \mathbf{u}^L(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\omega t},$$

где $\mathbf{u}^{TE}(\mathbf{r})$, $\mathbf{u}^{TM}(\mathbf{r})$, $\mathbf{u}^L(\mathbf{r})$ – периодические функции, принадлежащие выбранной полосе с индексом $n = n_0$, зависимостью которых от \mathbf{k} в указанном выше приближении можно пренебречь. Нетрудно показать, что коэффициент $c_2^L = 0$ в случае продольной геометрии, поэтому второе слагаемое будет ниже опущено.

Подставляя (16) в (8), получим

$$\left(\hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_1 + \hat{V} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{u}_{\mathbf{n}\mathbf{k}} = 0, \quad (18)$$

где

$$\hat{\mathcal{H}}_0 \mathbf{u}_{\mathbf{n}\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \frac{\mathbf{u}_{\mathbf{n}\mathbf{k}}}{\sqrt{\epsilon}},$$

$$\hat{\mathcal{H}}_1 \mathbf{u}_{\mathbf{n}\mathbf{k}} = \frac{i\mathbf{k}}{\sqrt{\epsilon}} \times \vec{\nabla} \times \frac{\mathbf{u}_{\mathbf{n}\mathbf{k}}}{\sqrt{\epsilon}} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \vec{\nabla} \times i\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{u}_{\mathbf{n}\mathbf{k}}}{\sqrt{\epsilon}} - \frac{\mathbf{k}}{\epsilon} \times \mathbf{k} \times \mathbf{u}_{\mathbf{n}\mathbf{k}},$$

$$\hat{V}\mathbf{u}_{nk} = -\frac{i\omega^2}{c^2}Q(\mathbf{r})[\mathbf{m}\mathbf{u}_{nk}],$$

$$\mathbf{u}_{nk}(\mathbf{r}) = c_1\mathbf{u}_{nk}^{TE} + c_2\mathbf{u}_{nk}^{TM}.$$

Рассмотрим сначала экстремальную точку Γ , т.е. $k \approx 0$. В нулевом порядке по k и Q решениями уравнения (18) служат функции Блоха при $k = 0$, соответствующие различным зонам. Функции $\mathbf{u}_{n_0}(\mathbf{r})$ образуют полную систему для разложения произвольной функции, обладающей трансляционной симметрией фотонного кристалла. Следовательно, они могут служить базисом для разложения $\mathbf{u}_{n_0k}(\mathbf{r})$ в ряд по теории возмущений. В наинизшем порядке теории возмущений по \mathcal{H}_1 и V , получим:

$$[(\omega_{\mathbf{k}}^{TE})^2 - \omega^2]c_1 - i\omega^2\langle Q \rangle c_2 = 0,$$

$$[(\omega_{\mathbf{k}}^{TM})^2 - \omega^2]c_2 + i\omega^2\langle Q \rangle c_1 = 0, \tag{19}$$

где

$$(\omega_{\mathbf{k}}^{TE})^2 = (\omega_0^{TE})^2 + c^2k^2\beta^{TE},$$

$$(\omega_{\mathbf{k}}^{TM})^2 = (\omega_0^{TM})^2 + c^2k^2\beta^{TM},$$

$$\langle Q \rangle = \langle u^{TE} | Q(r) | u^{TM} \rangle,$$

$$\beta^{TE(TM)} = \langle u^{TE(TM)} \left| \frac{1}{\epsilon(r)} \right| u^{TE(TM)} \rangle.$$

В следующем порядке теории возмущений по \mathcal{H}_1 сохраняется общая структура уравнения (19) для коэффициентов c_1 и c_2 , но коэффициенты $\beta^{TE(TM)}$ перенормируются.

$$k^2\beta^{TE} = k^2\langle u^{TE} \left| \frac{1}{\epsilon(r)} \right| u^{TE} \rangle + \sum_n \frac{|\langle u^{TE} | \mathcal{H}_1 | u_n^{TE} \rangle|^2}{(\omega_{\mathbf{k}}^{TE})^2 - (\omega_{n\mathbf{k}}^{TE})^2}. \tag{20}$$

Аналогично перенормируются параметры β^{TM} и $\langle Q \rangle$. Поэтому далее мы будем считать параметры β и $\langle Q \rangle$ перенормированными в указанном смысле. Следует заметить, что в формуле (19) для β^{TE} (также и β^{TM}) при суммировании по n ($n \neq n_0$) следует

учитывать полосы с той же четностью, что и исходная. Наоборот, в соответствующем выражении для Q следует учитывать лишь состояния противоположной четности. Из (19) следует:

$$((\omega_k^{TE})^2 - \omega^2)((\omega_k^{TM})^2 - \omega^2) - \omega^4 \langle Q \rangle^2 = 0. \quad (21)$$

Для выяснения принципиальной стороны дела примем $\omega_0^{TE} = \omega_0^{TM} \equiv \omega_0$, $\beta^{TE} = \beta^{TM} = \beta$. Тогда из (21) следует (при $\beta < 0$)

$$k_{\pm} = \frac{\omega}{c\sqrt{|\beta|}} \left(-1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \mp \langle Q \rangle \right)^{1/2}, \quad (22)$$

где знаки "+" и "-" относятся к двум квазициркулярно поляризованным волнам:

$$\vec{\Psi}^+(x) = \begin{pmatrix} u^{TE} \\ iu^{TM} \end{pmatrix} e^{ik_+x}, \quad \vec{\Psi}^-(x) = \begin{pmatrix} u^{TE} \\ -iu^{TM} \end{pmatrix} e^{ik_-x}. \quad (23)$$

Приставка "квази" здесь отражает тот факт, что волны (23) характеризуются произведением быстроосциллирующих функций $u^{TE}(x)$ и $u^{TM}(x)$ и сравнительно медленно изменяющихся "огibaющих" $\exp(ik_{\pm}x)$. Термин "циркулярно поляризованный" в строгом значении можно отнести здесь только к "огibaющим". Подставляя (22) в (17), получим

$$\begin{pmatrix} \Psi^{TE} \\ \Psi^{TM} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} u^{TE}(x) \cos \Delta kx \\ -u^{TM}(x) \sin \Delta kx \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где

$$\Delta k = k_+ - k_- = \frac{\omega}{c\sqrt{|\beta|}} \left[\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 - \langle Q \rangle \right)^{1/2} - \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 + \langle Q \rangle \right)^{1/2} \right].$$

Формула (24) показывает, что в процессе распространения электромагнитной волны вдоль магнитного поля в фотонном кристалле происходит взаимное преобразование (или конверсия) мод. Если на "вход" фотонного кристалла поступает TE -волна, то из-за гиротропии она по мере распространения превращается в TM -моду и т.д. Так проявляется эффект Фарадея в фотонном кристалле. Коэффициент преобразования (или угол поворота плоскости поляризации огibaющей волны после прохождения волной расстояния, равного единице длины), равен

$$\Phi_c = \Delta k \approx \frac{2\omega \langle Q \rangle}{c\sqrt{|\beta|}} \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right)^{-1/2}. \quad (25)$$

Из (25) следует, что Φ_c увеличивается при $\omega \rightarrow \omega_0$, что находится в соответствии с фундаментальным свойством фотонных кристаллов: вблизи экстремальных точек зоны Бриллюэна происходит критическое замедление распространяющихся волн (т.е. их групповая скорость стремится к 0), что приводит к возрастанию времени взаимодействия "волна – кристалл" и возрастанию соответствующих эффектов.

В более общем случае нужно принять во внимание, что $\omega_0^{TE} \neq \omega_0^{TM}$ и $\beta^{TE} \neq \beta^{TM}$. Это, очевидно, проявится в том, что фазовые (и групповые) скорости TE и TM будут не равны друг другу, т.е. возникнет эффект двулучепреломления. Его проявление, в свою очередь, в эффекте конверсии мод состоит также как и в двулучепреломляющих кристаллах, в том, что коэффициент преобразования мод уменьшится по величине и будет осциллирующей функцией от длины распространения светового луча. Подобный эффект известен также в интегральной магнитооптике [10, 11].

Проведенное рассмотрение эффекта конверсии мод нетрудно обобщить на другие экстремальные точки зоны Бриллюэна. Наибольшего внимания заслуживает весьма распространенная ситуация (рис. 2), когда в районе экстремальной точки находятся края зон двух разных полос $\omega_n(\mathbf{k})$ (они могут быть вырожденными или достаточно близкими друг к другу). Эти случаи будут рассмотрены в отдельной публикации.

Поперечная (Фойгта) геометрия. Магнитное линейное двулучепреломление. Пусть $\mathbf{H} \parallel \mathbf{z}_0, \mathbf{k} \parallel \mathbf{x}_0$ и

$$\vec{\Psi} = c_1 \Psi^{TE}(x) \mathbf{e}_{TE} + c_2 \Psi^{TM}(x) \mathbf{e}_{TM} + c_3 \Psi^L(x) \mathbf{e}_L, \quad (26)$$

где $\langle \mathbf{e}_i \Psi^i | \mathbf{e}_j \Psi^j \rangle = \delta_{ij}$ ($i = TE, TM, L$) и, согласно (10), $\mathcal{H} \Psi^L(x) = 0$.

Легко убедиться, что при подстановке (26) в (7) система уравнений (7) разделяется на две независимые подсистемы: одна для $\vec{\Psi}^{TE}$, другая для $\vec{\Psi}^{TM}$ и $\vec{\Psi}^L$. Первая (для TE) дает $(\omega_{\mathbf{k}}^{TE})^2 = \omega^2$, т.е.

$$k_{\parallel} = \frac{\omega}{c} \left| \frac{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}{\beta^{TE}} \right|^{1/2}. \quad (27)$$

Вторая подсистема после умножения ее последовательно на $\Psi^L(x) \mathbf{e}_L$ и $\Psi^{TM}(x) \mathbf{e}_{TM}$ и взятия операции свертки принимает вид:

$$-\omega^2 c_3 - i \omega^2 \langle \Psi^L | Q(\mathbf{r}) | \Psi^{TM} \rangle (\mathbf{e}_L [\mathbf{m} \mathbf{e}_{TM}]) c_2 = 0,$$

$$((\omega_{\mathbf{k}}^{TM})^2 - \omega^2) c_2 - i \omega^2 \langle \Psi^{TM} | Q(\mathbf{r}) | \Psi^L \rangle (\mathbf{e}_{TM} [\mathbf{m} \mathbf{e}_L]) c_3 = 0, \quad (28)$$

откуда следует:

$$\omega^2 = (\omega_k^{TM})^2 (1 - |Q_1|^2)^{-1}, \quad (29)$$

или

$$k_{\perp} = \frac{\omega}{c} \left| \frac{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - |Q_1|^2}{\beta^{TE}} \right|^{1/2}, \quad (30)$$

где $|Q_1| = |\langle \Psi^L | Q(\mathbf{r}) | \Psi^{TM} \rangle|$. Заметим, что $\langle Q \rangle$ в (19) и Q_1 в (29) определяются различными матричными элементами, поэтому правила отбора для проявления эффектов конверсии мод и магнитного линейного двулучепреломления отличаются.

Сравнивая (27) и (30), получим относительный сдвиг фаз TE - и TM -волн на единицу длины

$$B_{mb} = \text{Re}(k_{\parallel} - k_{\perp}) \approx \frac{\omega}{c} \frac{|Q_1|^2}{2\sqrt{|\beta|} \left| 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right|^{1/2}}, \quad (31)$$

где полагается, что $\beta^{TE} = \beta^{TM} = \beta$.

Аналогом рассмотренного эффекта магнитного линейного двулучепреломления в оптике кристаллов является эффект Фойгта (или Коттона–Мутона). По сравнению с последним формула (31) демонстрирует резкое увеличение сдвига фаз B_{mb} вблизи экстремальных точек зоны Бриллюэна, происходящее по той же причине, что и выше рассмотренное увеличение коэффициента конверсии мод.

Таким образом, магнитное поле, ориентированное в базисной плоскости $2D$ -фотонного кристалла, индуцирует конверсию мод: $TE \leftrightarrow TM$. Коэффициент преобразования мод испытывает критическое возрастание при приближении частоты электромагнитных волн к граничным частотам разрешенных полос частот (или, другими словами, при приближении к экстремальным точкам зоны Бриллюэна). Аналогично ведет себя относительный сдвиг фаз B_{mb} между TE - и TM -модами, возникающий в магнитном поле, ориентированном перпендикулярно базисной плоскости $2D$ -фотонного кристалла.

Работа поддержана проектами РФФИ (02-02-17389), Интеграция (Б-0056).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Yablono vitch E. Phys. Rev. Lett., **58**, 2059 (1987).

- [2] John S. Phys. Rev. Lett., **58**, 2486 (1987).
- [3] Joannopoulos J. D., Meade R. D., and Winn J. N. Photonic Crystals: Molding the Flow of Light (Princeton, Sept. 1995).
- [4] Johnson S. G., Joannopoulos J. D. Photonic Crystals: The Road from Theory to Practice (Kluwer Acad. Publ. 2002).
- [5] Sakoda K. Optical Properties of Photonic Crystals (Springer, 2001).
- [6] Purcell E. M. Phys. Rev., **69**, 681 (1946).
- [7] Pendry J. B., McKinnon. Phys. Rev. Lett., **69**, 2772 (1992).
- [8] Ontaka K., Tanabe Y. J. Phys. Soc. Jap., **65**, 2276 (1996).
- [9] Sakoda K., Ontaka K. Phys. Rev., **B54**, 5742 (1996).
- [10] Zvezdin A. K., Kotov V. A. Modern magneto-optics and magneto-optical materials, IOP Publishing, 1997.
- [11] Звездин А. К., Котов В. А. Магнитооптика тонких пленок, М., Наука, 1988.
- [12] Харрисон У. Теория твердого тела, М., Мир, 1972.

Институт общей физики РАН

Поступила в редакцию 31 января 2003 г.