УДК 537.591

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ВАВИЛОВА–ЧЕРЕНКОВА В ВОЛНОВОЙ ЗОНЕ ФРЕНЕЛЯ ДЛЯ КОНЕЧНОГО ТРЕКА ЗАРЯДА

Г. А. Гусев

Получены поправки к формуле Тамма первого и второго порядка при малых отношениях длины трека точечного заряда в случае излучения Вавилова–Черенкова к расстоянию до точки приема для конечного трека в волновой зоне Френеля. Результат обсуждается в контексте реальных условий лунного эксперимента ЛОРД по регистрации радиоизлучения от каскадов, порождаемых нейтрино и космическими лучами вблизи лунной поверхности.

Ключевые слова: излучение Вавилова–Черенкова, формула Тамма, конечный трек, волновая зона Фраунгофера, Френеля.

Часто в реальных физических задачах при расчете излучения Вавилова–Черенкова необходимо учитывать конечную длину трека заряженной частицы или протяженного избытка заряда, возникающего в каскадах, развивающихся в средах с показателем преломления, большим единицы. В частности, это важно при регистрации когерентного радиоизлучения от каскадов. Хорошо известен результат, полученный впервые Таммом [1], для излучения Вавилова–Черенкова в волновой зоне Фраунгофера для случая, когда точечный заряд q движется в среде равномерно и имеет конечный трек. При этом явно не учитывается переходное излучение при его быстром ускорении и замедлении. Резкое включение и выключение тока qv приводит к сильным осцилляциям в угловом распределении излучения (см. обсуждение в работе [2]). Также пренебрегается поправками, связанными с приближенным представлением заряда δ-функцией, которое верно для бесконечного трека, а для конечного его точность определяется большим параметром kl отношения длины трека l к длине излучаемой волны $\lambda = 2\pi/k$. Мы предполагаем, что выполнено условие $kl >> 1$, в частности, оно выполняется с асимптотической точностью для $l = \lambda$. Формула Тамма для векторного потенциала тока, направленного вдоль оси

Учреждение Российской академии наук Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, 119991, Москва, Ленинский пр-т, 53; e-mail: gusev@sci.lebedev.ru.

z, имеет вид:

$$A = 4\pi(q/c^2)\beta n(\exp(-ikR)/R)\sin kl(\beta n\cos\theta - 1)/\beta n)/k(\beta n\cos\theta - 1). \qquad (1)$$

Здесь c – скорость света, n – показатель преломления, $\beta = v/c$, v – скорость заряда, R – расстояние от середины трека, выбранной в качестве начала системы отсчета, до точки измерения излучения, θ – угол между осью z и волновым вектором k . Формула (1) справедлива в волновой зоне Фраунгофера при больших значениях параметра R/l, когда излучение имеет вид трехмерной сферической волны и его угловая зависимость соответствует диаграмме направленности, ширина которой тем меньше, чем длиннее трек заряда. Следует отметить, что в формуле (1) в "черенковском" направлении $\cos\theta_c = 1/\beta n$ формально имеет место неопределенность, раскрытие которой снимает кажущуюся особенность и приводит к исчезновению зависимости векторного потенциала от $\beta n\lambda$, вместо которой появляется прямая пропорциональная зависимость поля от l вместо осцилляторной, которая имеет место вдали от "черенковского" направления. Такой скачок означает неаналитичность формулы (1) по углу θ при значении θ_c, отвечающем $\cos\theta_c = 1/\beta n$. Как увидим ниже, следствием этого будет появление особенности при стремлении θ к θ_c в разложении поля по малому параметру l/R.

Возникает вопрос, как изменяется формула (1) при переходе из волновой зоны Фраунгофера в волновую зону Френеля, когда при $kl>>1$ изучение сформировано не полностью в том смысле, что еще не сформирована сферическая волна с фраунгоферовой диаграммой направленности. В этом случае существенны поправки, пропорциональные малому параметру l/R. Чтобы найти такие поправки, рассмотрим исходный интеграл [1] для нахождения векторного потенциала

$$A = qv/c^2R\int\limits_{-l/2}^{l/2}\exp(ik(\sqrt{(R^2 + z'^2 - 2R\cos\theta z')} - z'/\beta n)dz'. \qquad (2)$$

Представляя корень в экспоненте под интегралом в виде разложения по малому параметру l/R и интегрируя, в первом приближении получим формулу Тамма (1). В следующих приближениях интегралы тоже легко берутся и получаются следующие поправки (мы ограничиваемся вторым порядком по l/R) к формуле (1):

$$A = 4\pi(qn/c)(v/c)(\exp(-ikR)/R)\{(\sin kl(\beta n\cos\theta - 1)/\beta n)/k(\beta n\cos\theta - 1)[1 + ikl^2(1-$$

$$-2\cos\theta/4R + ikl^3(9 - 22\cos^2\theta)/16R^2] + (l/R)\cos\theta[(\beta n\cos kl(1 - \beta n\cos\theta)/2\beta n)/ik(1-$$

$$-\beta n\cos\theta) + 2i(\beta n)^2/k^2l(\beta n\cos\theta - 1)^2] - (l/2r)(1-\cos^2\theta)[(4\beta n\sin kl(\beta n\cos\theta-$$

$$-1)/2\beta n)/k^2l(\beta n\cos\theta - 1) + (\beta n\cos kl(\beta n\cos\theta - 1)/2\beta n)/k(\beta n\cos\theta - 1)]-$$

$$-3\beta n(l^2/4R^2(\beta n\cos\theta - 1))(9 - 22\cos^2\theta)[2\beta n(\sin kl(\beta n\cos\theta - 1)/2\beta n)/k(\beta n\cos\theta-$$

$$-1)(1/4 - 2\beta^2n^2/k^2l^2(\beta n\cos\theta - 1)^2) - 2\beta n(\cos kl(\beta n\cos\theta - 1)/2\beta n)/k(\beta n\cos\theta - 1)]\}. \quad (3)$$

Это разложение не только по малому параметру l/R, но и одновременно по малому параметру $(kl)^{-1}$. Отметим, что часть этих поправок совпадает по фазе с главным членом разложения, а часть сдвинута по фазе на $\pi/2$. Существенно также, что члены, малые по параметру $(kl)^{-1}$, имеют особенность в направлении максимума излучения Вавилова–Черенкова $\theta = \theta_c$. Это отражает асимптотический характер разложения по малому параметру $(kl)^{-1}$ одновременно с разложением по малому параметру l/R. Поскольку эти члены должны быть малыми по обоим параметрам по сравнению с 1, то это означает, что разложение (3) при недостаточно больших R/l теряет силу вблизи таких углов θ, для которых эти члены по величине приближаются к 1. Если эти члены порядка 1 для всех практически важных направлений, то асимптотическое разложение (3) может использоваться только для грубых оценок, из которых видно, что и главный член разложения уже не годится в качестве доминирующего, каковым он является при больших R/l. В то же время, пользуясь разложением (3) на границе его применимости, можно ответить на вопросы, интересные в приложениях. С другой стороны, учет реального затухания в среде, то есть мнимой части комплексного показателя преломления, снимает эти особенности при $\theta = \theta_c$, но большая величина этих членов при некоторых значениях параметра R/l по сравнению с главным членом по-прежнему означает неприменимость разложения (3) в определенном интервале углов θ вблизи $\theta = \theta_c$.

В частности, нас будет интересовать экспериментальная ситуация, реализующаяся в эксперименте ЛОРД [3] (Лунный Орбитальный РадиоДетектор) по регистрации радиоизлучения Вавилова–Черенкова каскадов от космических лучей и нейтрино ультравысоких энергий в лунном реголите. Это излучение выходит из реголита в вакуум, граница между которыми в первом приближении для не слишком шероховатых поверхностей может считаться плоской. В случае нейтрино для глубин в несколько метров и длины каскада порядка метра можно приближенно считать, что граница находится в волновой зоне Френеля, где необходимо учитывать поправки (3) к формуле Тамма. В случае каскадов во льду для эксперимента АНИТА [4], хотя расстояния до плоской границы порядка сотен метров, такое уточнение рассчитывалось численно для более реалистичной модели каскада [2] больших длин, и было показано, что амплитуда сигнала заметно снижалась, а диаграмма направленности соответственно расширялась. Это естественно интерпретировать как "недоформирование" сигнала. В случае Луны и других параметров эксперимента эти поправки будут другими и приведут к тому, что после использования граничных условий появятся поправки к главному члену уже в зоне Фраунгофера на больших расстояниях от плоскости. Это означает, что изменится амплитуда и диаграмма направленности на больших расстояниях от поверхности Луны по сравнению со случаем, когда каскад находится на большом расстоянии от границы, достаточном для формирования сферической волны, то есть сама граница находится в зоне Фраунгофера по отношению к источнику.

Сделаем оценки с помощью формулы (3) для параметров в эксперименте ЛОРД. Пусть длина трека эффективного излучающего заряда каскада от нейтрино равна $l = 1$ м, глубина трека $R = 10$ м, длина волны $\lambda = 1$ м, в вакууме, показатель преломления реголита $n = 1.7$. В формуле (3) есть члены, имеющие "таммовскую" угловую направленность. Среди них при выбранных параметрах член, пропорциональный l/R, для таких параметров для "черенковского" направления составляет 60% от главного члена. Правда, следует учитывать, что из-за сдвига по фазе на $\pi/2$ вклад в амплитуду поля оказывается примерно 17%, но он быстро растет с убыванием расстояния до трека. В то же время поправка второго порядка по l/R составляет 11% от главного члена для рассмотренных параметров, но она еще быстрее растет при уменьшении R. Что касается поправок, имеющих особенность при "черенковском" направлении, то ими можно пользоваться для тех направлений и тех расстояний от трека, когда они малы по сравнению с единицей.

Таким образом, для нейтрино в условиях эксперимента ЛОРД, когда трек заглублен на несколько метров, с ограниченной точностью можно пользоваться формулой Тамма. Но для каскадов от космических лучей, которые развиваются вблизи поверхности Луны, это не так, так как в этом случае граница находится в ближней зоне источника излучения и потому поперечная волна еще не сформирована. Хотя разложение (3), в основе которого лежит доминирование первого члена, очевидным образом не применимо для сравнительно малых расстояний до источника, но оно указывает на то, что формирование излучения Вавилова–Черенкова не может быть реализовано для направлений вверх из-за того, что граница находится в ближней зоне источника. Следовательно, граница сильно влияет на сам механизм излучения, а формирование поперечного излучения происходит вне среды. В этом случае скорее можно говорить о переходном излучении заряда на границе, когда амплитуда и угловая направленность сигнала существенно отличаются от случая излучения Вавилова–Черенкова, полностью сформированного в среде, согласно формуле Тамма, на далеких расстояниях от границы и затем выходящего в вакуум. Само решение задачи в этом случае должно проводиться численно, так как в этом случае даже поле на границе не может быть найдено аналитически.

ЛИТЕРАТУРА

[1] I. E. Tamm, J. Phys. **1**, 439 (1939).
[2] R. V. Buniy, J. P. Ralston, arXiv: astro-ph/3408 v1, 27 (2000).
[3] Г. А. Гусев, Б. Н. Ломоносов, К. М. Пичхадзе и др., Космические исследования **44**(1), 22 (2006).
[4] S. W. Barwick, J. J. Beatty, D. Z. Besson, et al., Phys. Rev. Lett. **96**, 171101 (2006).

Поступила в редакцию 4 декабря 2009 г.