

УДК 535.361

ОПТИЧЕСКИЕ УСТРОЙСТВА НА ОСНОВЕ МАТЕРИАЛОВ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ПРЕЛОМЛЕНИЕМ

В. С. Горелик, В. В. Щавлев

В работе получен инвариант Аббе для сред с отрицательным показателем преломления, позволяющий осуществлять расчёты оптических устройств с элементами, характеризующимися отрицательным преломлением. Получены формулы для расчёта расстояний от источника до изображения и для расчёта увеличения, даваемого различными линзами с отрицательным преломлением. Представлены принципиальные схемы фокусатора, микроскопа и спектрографа, в которых использованы материалы с отрицательным преломлением. Приведены оценки увеличения микроскопа и фокусатора. Рассчитана линейная дисперсия спектрографа, в котором в качестве спектрального элемента была использована плоскопараллельная пластина с отрицательным преломлением.

Ключевые слова: линза, микроскоп, фокусатор, спектрограф, отрицательный показатель преломления, увеличение, дисперсия, волновой вектор, фазовая скорость, групповая скорость.

1. *Введение.* Возможность существования волн, характеризующихся отрицательным показателем преломления, анализировалась более века назад Шустером в книге [1]. Было показано, что при условии отрицательного показателя преломления фазовая и групповая скорости взаимно противоположно направлены. Лэмб в работе [2] рассмотрел аналогичный эффект для звуковых волн. В 1944 году Мандельштам показал [3], что взаимно противоположные направления групповой и фазовой скоростей, приводящие к отрицательному знаку показателя преломления, реализуются для волн, соответствующих оптическим ветвям ионных кристаллов типа хлористого натрия. В работе [4]

Учреждение Российской академии наук Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, 119991, Москва, Ленинский пр-т, 53; e-mail: gorelik@sci.lebedev.ru

Аграновича и Гинзбурга было показано, что отрицательное значение показателя преломления может быть реализовано в диэлектрических кристаллах в экситонной области спектра. Такой эффект должен наблюдаться при наличии пространственной дисперсии. При этом дисперсионные ветви, соответствующие светоэкситонам, характеризуются зависимостью $\omega(k)$, для которой имеет место $\frac{d\omega}{dk} < 0$, т.е. направления фазовой и групповой скоростей экситонных волн взаимно противоположны.

В работе [5] Веселаго было показано, что в материальных средах возможно существование электромагнитных волн, для которых оказываются отрицательными как диэлектрическая, так и магнитная проницаемости. Это обеспечивает положительность квадрата показателя преломления, т.е. $n^2 = \epsilon\mu > 0$. Вследствие отрицательного значения μ в этом случае тройка векторов $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{k}$ из “правой” превращается в “левую”. При этом вектор Умова–Пойнтинга оказывается антиколлинеарен с волновым вектором $\mathbf{k}$, т.е. направления групповой и фазовой скоростей оказываются взаимно противоположными. Это приводит к отрицательному знаку для показателя преломления. Длительное время не удавалось наблюдать эффект отрицательного преломления волны на границе раздела сред. В 2000 году [6] был изготовлен образец с отрицательным показателем преломления, с которым был проведен эксперимент, подтвердивший присутствие отрицательного преломления в микроволновом диапазоне длин волн.

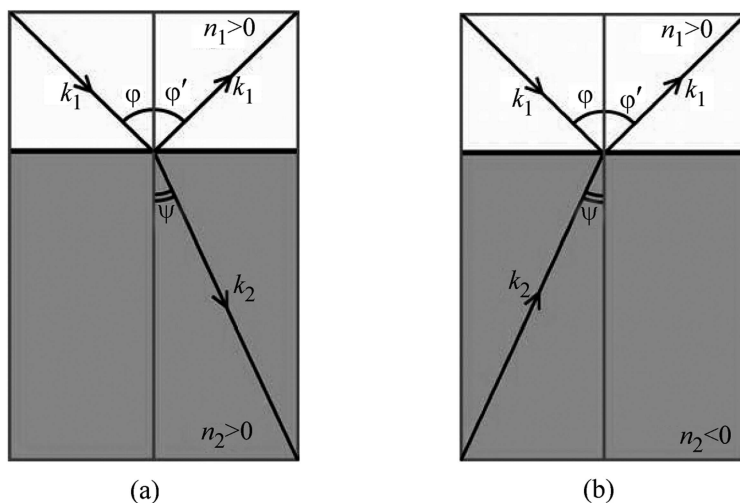


Рис. 1: Отражение и преломление луча на границе среды с положительным (a) и отрицательным (b) показателем преломления.

В данной работе была поставлена задача анализа законов геометрической оптики в параксиальном приближении, позволяющих рассчитывать характеристики оптических

устройств, содержащих элементы с отрицательным показателем преломления.

2. Закон Снеллиуса и инвариант Аббе для сред с отрицательным преломлением.

2.1. Условие отрицательности значения показателя преломления. Из закона сохранения проекции импульса фотона на ось X $p_x = \hbar k_x$ для отражения и преломления электромагнитного излучения соответственно имеют место соотношения:

$$k_1 \sin \varphi = k_1 \sin \varphi',$$

$$k_1 \sin \varphi = k_2 \sin |\psi|. \quad (1)$$

Здесь k_1, k_2 – модули соответствующих волновых векторов. Последнее равенство может выполняться при углах преломления $\psi > 0$ и $\psi < 0$ (рис. 1). При условии $n_1 > 0$ и $n_2 < 0$ модули волнового вектора для падающей и преломленной волн соответственно имеют вид:

$$k_1 = n_1 \frac{\omega}{c}, \quad k_2 = |n_2| \frac{\omega}{c}. \quad (2)$$

Если $\psi < 0$, то фаза волны набегает на границу, хотя энергия волны по-прежнему движется от границы. В этом случае фазовая скорость направлена противоположно групповой скорости.

Подставляя выражения (2) в формулу (1), приходим к закону Снеллиуса–Декарта:

$$n_1 \sin \varphi = n_2 \sin \psi. \quad (3)$$

Уравнения Максвелла в диэлектрической среде имеют вид:

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (4)$$

А материальные уравнения записываются в виде:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (5)$$

Из (4) для плоских монохроматических волн получаем:

$$[\mathbf{kE}] = \frac{\omega}{c} \mu \mathbf{H}, \quad [\mathbf{kH}] = -\frac{\omega}{c} \varepsilon \mathbf{E}. \quad (6)$$

Отсюда приходим к выводу, что у материалов с положительными ε и μ векторы $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{k}$ образуют “правую” тройку, а у материалов с отрицательными ε и μ – “левую”. Вектор же Пойнтинга $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}]$ всегда образует правую тройку с векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Таким образом, фазовая и групповая скорости волны противоположно направлены в средах с одновременно отрицательными ε и μ [7].

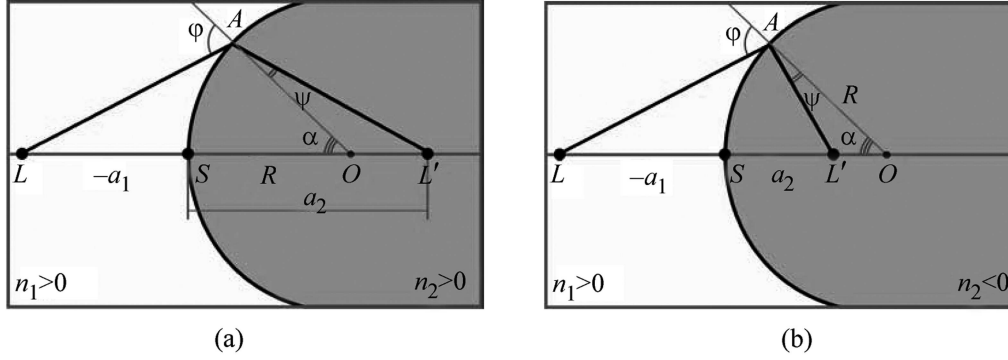


Рис. 2: Преломление волны на сферической поверхности среды с положительным (а) и с отрицательным (b) преломлением (здесь и далее – пояснения в тексте).

2.2. Инвариант Аббе для сред с отрицательным показателем преломления. Получим инвариант Аббе при преломлении света на сферической поверхности среды с положительным [8] и с отрицательным показателем преломления.

В дальнейшем будем рассматривать приближение параксиальной оптики. Предположим, что у нас есть две среды, разделённые сферической поверхностью, центр O которой лежит на прямой LL' . Точечный источник находится в т. L , его изображение получается в т. L' . На рис. 2 показан ход луча LAL' . Рассмотрим параксиальный пучок, тогда $LA \approx LS$, $L'A \approx L'S$.

Из $\triangle ALO$ и $\triangle AL'O$ по теореме синусов получаем следующие соотношения для сторон:

$$\begin{aligned} \triangle ALO : \frac{LO}{LA} &= \frac{\sin(180 - \varphi)}{\sin \alpha} = \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha}, \\ \triangle AL'O : \frac{AL'}{OL'} &= \frac{\sin(180 - \alpha)}{\sin \psi} = \frac{\sin \alpha}{\sin \psi}. \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{LO}{LA} \frac{AL'}{OL'} &= \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{при } n_2 > 0), \\ \frac{LO}{LA} \frac{AL'}{OL'} &= \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{(-n_2)}{n_1} \quad (\text{при } n_2 < 0). \end{aligned} \quad (8)$$

В нижней формуле (8) знак минус появляется из-за того, что здесь ψ – абсолютная величина угла. Условимся все отрезки вдоль оптической оси отсчитывать от точки S , считая положительными отрезки, откладываемые от S вправо, и отрицательными – отрезки, откладываемые влево.

Пусть R – радиус сферической поверхности, $(-a_1), a_2$ – расстояния от O до L и L' . Тогда

$$\begin{aligned} AL \approx SL = (-a_1), \quad AL' \approx SL' = a_2, \quad LO = R - a_1, \\ OL' = a_2 - R (\text{при } n_2 > 0), \quad OL' = R - a_2 (\text{при } n_2 < 0). \end{aligned} \quad (9)$$

Подставив выражения для расстояний из (9) в формулы (8), получим

$$\frac{R - a_1}{(-a_1)} \frac{a_2}{a_2 - R} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (10)$$

Откуда следует инвариант Аббе:

$$Q = n_1 \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{R} \right) = n_2 \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{R} \right) = \text{const.} \quad (11)$$

Отметим, что в случае плоской поверхности раздела ($R = \infty$) инвариант Аббе принимает упрощенный вид:

$$Q = \frac{n_1}{a_1} = \frac{n_2}{a_2} = \text{const.} \quad (12)$$

Из инварианта Аббе, в частности, следует, что расстояние до изображения можно вычислить по формуле:

$$a_2 = \frac{n_2 a_1 R}{a_1(n_2 - n_1) + n_1 R}. \quad (13)$$

А в случае плоской поверхности – по формуле:

$$a_2 = \frac{n_2}{n_1} a_1. \quad (14)$$

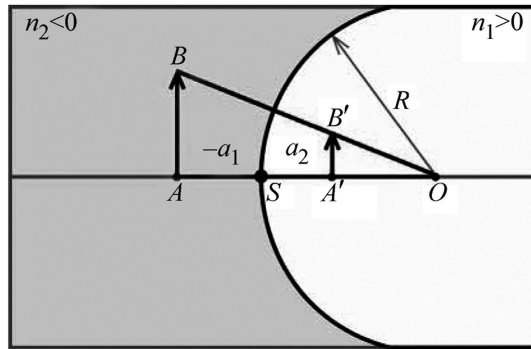


Рис. 3: Увеличение изображения, даваемое плосковогнутой линзой с отрицательным преломлением.

3. Увеличение, даваемое линзой с отрицательным преломлением. Формулу для увеличения можно наглядно получить следующим образом. Рассмотрим плосковогнутую

линзу с отрицательным преломлением (рис. 3). Изображение AB преобразуется в изображение $A'B'$. Треугольники $\triangle ABO$ и $\triangle A'B'O$ подобны, поэтому $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'O}{AO}$. В наших обозначениях $AO = R - a_1$, $A'O = R - a_2$. Напомним, что расстояния отсчитываются от точки S с учетом знаков. Следовательно, увеличение линзы можно рассчитать по формуле:

$$V = \frac{A'B'}{AB} = \frac{R - a_2}{R - a_1}. \quad (15)$$

В приближении параксиальной оптики увеличение линзы также можно вычислить по формуле:

$$V = \frac{a_2}{a_1} \frac{n_1}{n_2}. \quad (16)$$

Из формулы (16) можно легко получить формулу (15), подставив отношение показателей преломления из инварианта Аббе (11)

$$\frac{n_1}{n_2} = \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{R} \right) \div \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{R} \right) = \frac{a_1}{a_2} \frac{R - a_2}{R - a_1}. \quad (17)$$

4. Оптические устройства, создаваемые на основе материалов с отрицательным преломлением.

Используя материалы с отрицательным преломлением, можно создавать различные оптические устройства. Приведем принципиальные схемы некоторых из них.

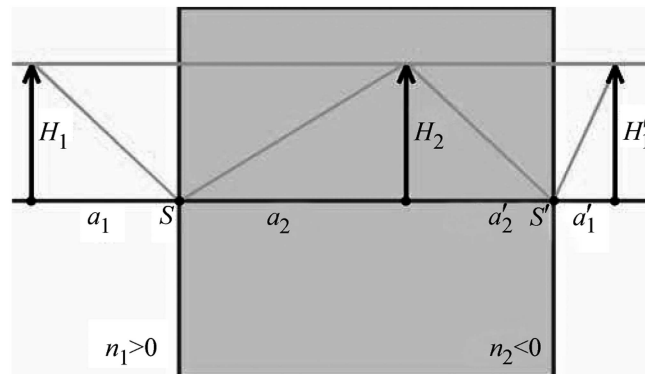


Рис. 4: Изображения, даваемые плоскопараллельной линзой с отрицательным преломлением.

4.1. Плоскопараллельная линза с отрицательным преломлением (линза Веселаго). Выполняет ту же роль, что и обычная линза – позволяет получить изображение предмета. Принципиальная схема устройства представлена на рис. 4. Увеличение, даваемое

плоскопараллельной линзой с отрицательным преломлением, равно единице. Покажем это.

Инвариант Аббе в случае плоских поверхностей S и S' записывается в виде:

$$\frac{n_1}{a_1} = \frac{n_2}{a_2}, \quad \frac{n_2}{a'_2} = \frac{n_1}{a'_1}. \quad (18)$$

Увеличение, даваемое плоскопараллельной линзой, вычисляем по формуле (16)

$$V = V_1 V_2 = \left(\frac{a_2}{a_1} \frac{n_1}{n_2} \right) \left(\frac{a'_1}{a'_2} \frac{n_2}{n_1} \right) = 1. \quad (19)$$

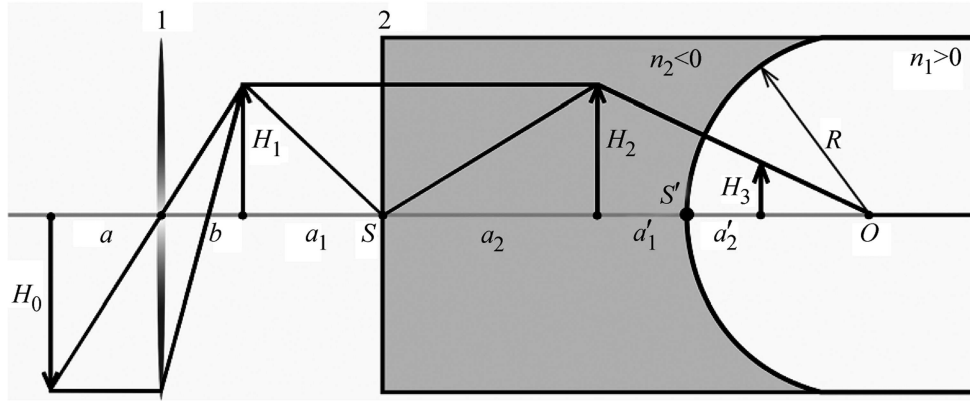


Рис. 5: Схема фокусатора с плосковогнутой линзой с отрицательным преломлением; 1 – предварительный конденсор для получения уменьшенного изображения предмета, 2 – линза с отрицательным показателем преломления.

4.2. Фокусатор. Фокусатор представляет собой плосковогнутую линзу с отрицательным преломлением, позволяющую получать уменьшенное изображение H_3 предмета. Принципиальная схема хода лучей в фокусаторе представлена на рис. 5. Из этого рисунка видно, что $R > 0$, $a'_1 < 0$, $0 < a'_2 < R$. Учитывая эти соотношения, получаем увеличение, меньшее единицы

$$V = \frac{R - a'_2}{R - a'_1} < 1. \quad (20)$$

Причем, чем дальше изображение H_2 предмета от центра O сферической поверхности, тем меньше увеличение фокусатора.

4.3. Микроскоп. Для получения увеличенных изображений малых объектов может быть использован микроскоп, представляющий собой плосковыпуклую линзу с отрицательным преломлением с последующим обычным микроскопом. Принципиальная схема

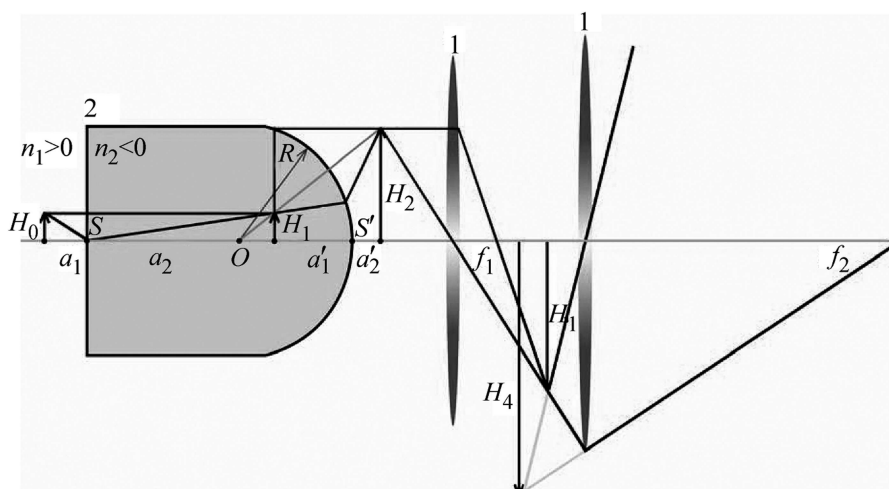


Рис. 6: Схема микроскопа с плосковыпуклой линзой с отрицательным преломлением; 1 – конденсоры, 2 – линза с отрицательным показателем преломления.

такого устройства представлена на рис. 6. По рисунку видно, что $R < 0$, $R < a'_1 < 0$, $a'_2 > 0$. Получаем, что плосковыпуклая линза, установленная в микроскопе, даёт увеличение

$$V = \frac{R - a'_2}{R - a'_1} > 1. \quad (21)$$

И увеличение тем больше, чем ближе изображение H_1 предмета к центру O сферической поверхности.

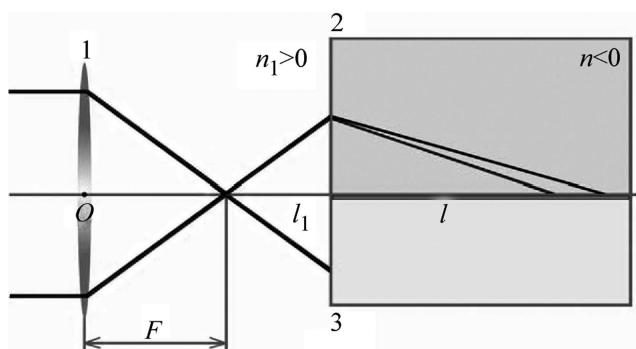


Рис. 7: Схема спектрографа с отрицательным спектральным элементом; 1 – конденсор, 2 – линза с отрицательным показателем преломления, 3 – многоэлементный приемник излучения.

4.4. *Спектрограф*. Спектрограф со спектральным элементом, изготовленным из материала с отрицательным преломлением, служит для регистрации спектров излучения. Принципиальная схема такого прибора представлена на рис. 7. Преимуществами данного спектрографа являются его компактность и простота исполнения. Важнейшей характеристикой спектрального прибора является его дисперсия. Рассчитаем линейную дисперсию обсуждаемого спектрографа. Если предположить, что в первом приближении зависимость показателя преломления от частоты описывается электронной теорией, то

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (22)$$

Здесь ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума (в СИ), $\omega_0 = \sqrt{\frac{b}{m}}$ – частота собственных колебаний электрона. Дифференцируя по ω , получаем:

$$\frac{dn}{d\omega} = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \frac{1}{n}. \quad (23)$$

Подставляя $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ в формулу (23), получаем дисперсию показателя преломления по длине волны:

$$\frac{dn}{d\lambda} = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{(-1)}{(2\pi c)^2} \frac{\lambda_0^4 \lambda}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)^2} \frac{1}{n}. \quad (24)$$

Дисперсию спектрального элемента $\frac{dl}{d\lambda}$ можно найти из соотношения

$$\frac{dl}{d\lambda} = \frac{dl}{dn} \frac{dn}{d\lambda}. \quad (25)$$

Здесь $\frac{dl}{dn}$ можно найти, используя формулу (14)

$$l = \frac{n}{n_1} l_1, \quad (26)$$

$$\frac{dl}{dn} = \frac{l_1}{n_1}. \quad (27)$$

Подставляя (24) и (27) в (25), получаем линейную дисперсию спектрографа:

$$\frac{dl}{d\lambda} = \left| \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{(-1)}{(2\pi c)^2} \frac{\lambda_0^4 \lambda}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)^2} \frac{1}{n} \frac{l_1}{n_1} \right|. \quad (28)$$

В качестве примера рассчитаем дисперсию для плавленого кварца

$$N = 1.46, \quad n_1 = 1, \quad l_1 = 0.2(\text{м}), \quad \lambda_0 = 200(\text{нм}), \quad \lambda = 486(\text{нм}),$$

$$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \left(\frac{\Phi}{\text{м}} \right), \quad e = 1.6 \cdot 10^{-19} (\text{Кл}), \quad m = 9.1 \cdot 10^{-31} (\text{кг}).$$

Концентрацию атомов в плавленом кварце можно рассчитать следующим образом:

$$N = \frac{\rho N_A}{M(\text{SiO}_2)} \approx 2.1 \cdot 10^{22} \frac{\text{шт}}{\text{см}^3} = 2.1 \cdot 10^{28} \frac{\text{шт}}{\text{м}^3}. \quad (29)$$

Подставляя вышеприведенные значения величин в формулу (28), получаем линейную дисперсию спектрографа:

$$\frac{dl}{d\lambda} = 5.25 \cdot 10^{-3} \frac{\text{мм}}{\text{А}}.$$

Обратная линейная дисперсия спектрографа равна:

$$\frac{d\lambda}{dl} = \left[\frac{dl}{d\lambda} \right]^{-1} = \left[\left| \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{(-1)}{(2\pi c)^2} \frac{\lambda_0^4 \lambda}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)^2} \frac{1}{n} \frac{l_1}{n_1} \right| \right]^{-1} = 190.5 \frac{\text{А}}{\text{мм}}. \quad (30)$$

5. Заключение. Таким образом, нами получен инвариант Аббе для сред с отрицательным показателем преломления. На основе использования такого инварианта сделаны оценки увеличения линз с отрицательным преломлением и линейной дисперсии спектрографа с отрицательным спектральным элементом. В заключение отметим, что приборы, созданные на основе сред с отрицательным преломлением, открывают новые возможности для оптического приборостроения.

Выражаем благодарность В. Г. Веселаго за полезные замечания и С. А. Швецову за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Schuster, *An introduction to the theory of Optics* (Edward Arnold, London, 1904), pp. 256, 257, 313.
- [2] H. Lamb, Proc. London Math. Soc. **1**, 473 (1904).
- [3] Л. И. Мандельштам, *Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике* (М., Наука, 1972).
- [4] В. М. Агранович, Ю. Н. Гартштейн, УФН **176**, 1051 (2006).
- [5] В. Г. Веселаго, УФН **92**, 517 (1967).
- [6] J. B. Pendry and D. R. Smith, Scientific American, № 7, 60 (2006).
- [7] В. Г. Веселаго, УФН **173**, 790 (2003).
- [8] Г. С. Ландсберг, *Оптика* (М., Наука, 1976), стр. 280-281.

Поступила в редакцию 12 марта 2010 г.