УДК 530.12:531.51

МЕТРИКИ И ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ 6-МЕРНЫХ h-ПРОСТРАНСТВ ТИПОВ [3(21)], [(32)1], [(321)]

З. Х. Закирова[1]

В настоящей статье найдена метрика шестимерных h-пространств типов $[3(21)], [(32)1], [(321)]$, *а затем определены квадратичные первые интегралы уравнений геодезических в этих h-пространствах.*

Ключевые слова: общая теория относительности, псевдоримановы пространства.

1. Целью данной работы является определение всех классов 6-мерных h-пространств типов [3(21)], [(32)1], [(321)], т. е. псевдоримановых пространств V^6, допускающих нетривиальные решения уравнения Эйзенхарта, а также нахождение квадратичных первых интегралов уравнений геодезических рассматриваемых пространств.

Решение задачи основано на предложенной А. В. Аминовой [1] технике интегрирования в косонормальном репере и развитом ей общем подходе к нахождению и исследованию проективных преобразований псевдоримановых многообразий.

Известно, что дифференцируемая симметричная билинейная форма h в псевдоримановом многообразии M^n удовлетворяет уравнению Эйзенхарта, если условие

$$\nabla h(X, Z, W) = 2g(X, Z)W\varphi + 2g(X, W)Z\varphi + 2g(Z, W)X\varphi \tag{1}$$

выполняется для некоторой 0-формы φ в M^n и произвольных векторных полей $X, Z, W \in TM^n$.

После замены переменных

$$h = a + 2\varphi g, \tag{2}$$

где a – симметричная билинейная форма той же характеристики, что и h, уравнение (1) перепишется в виде [1]

$$\nabla a(X, Z, W) = g(X, W)Z\varphi + g(W, Z)X\varphi, \tag{3}$$

[1] Казанский государственный энергетический университет, 420066, Казань, ул. Красносельская, 51; e-mail: zolya_zakirova@mail.ru.

где X, W, Z – произвольные векторные поля, определенные в области V.

2. Уравнения Эйзенхарта в косонормальном репере в случае h-пространств типов [3(21)], [(32)1], [(321)]. Если $\{X_l\}$ – косонормальный репер, то имеет место уравнение [1]

$$X_r \bar{a}_{pq} + \sum_{h=1}^{n} e_h (\bar{a}_{hq}\gamma_{\tilde{h}pr} + \bar{a}_{ph}\gamma_{\tilde{h}qr}) = \overline{g}_{pr} X_q \varphi + \overline{g}_{qr} X_p \varphi \tag{4}$$

$$(p, q, r, \tilde{h} = 1, \ldots, n),$$

эквивалентное уравнению (1). Здесь

$$X_r \varphi \equiv \underset{r}{\xi}^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}, \quad \gamma_{pqr} = -\gamma_{qpr} = \underset{p}{\xi}_{i,j} \underset{q}{\xi}^i \underset{r}{\xi}^j,$$

$\underset{i}{\xi}^j$ – компоненты косонормального репера, $\bar{a}_{pq}$ и $\overline{g}_{pr}$ являются каноническими значениями тензоров a_{ij} и g_{ij}.

В рассматриваемых h-пространствах канонические формы записываются в виде

$$\bar{g}_{ij} dx^i dx^j = e_3(2dx^1 dx^3 + dx^{2^2}) + 2e_5 dx^4 dx^5 + e_6 dx^{6^2}, \tag{5}$$

$$\bar{a}_{ij} dx^i dx^j = e_3 \lambda_3 (2dx^1 dx^3 + dx^{2^2}) + 2e_3 dx^2 dx^3 + 2e_5 \lambda_5 dx^4 dx^5 +$$

$$+ e_5 dx^{5^2} + e_6 \lambda_6 dx^{6^2},$$

$$(e_1 = e_2 = e_3, e_4 = e_5), \quad e_i = \pm 1,$$

где $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, $\lambda_4 = \lambda_5$, λ_6 – вещественные функции, являющиеся корнями характеристического уравнения $\det(h_{ij} - \lambda g_{ij}) = 0$. В случае h-пространств типа [3(21)] $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6$, для h-пространств типа [(32)1] $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5$, в случае h-пространств типа [(321)] все λ_i $(i = 1, \ldots, 6)$ совпадают.

Подставив в уравнение (4) вместо $\bar{g}_{pq}$ и $\bar{a}_{pq}$ соответствующие канонические значения из (5) и учитывая, что в рассматриваемых пространствах $\tilde{1} = 3$, $\tilde{2} = 2$, $\tilde{3} = 1$, $\tilde{4} = 5$, $\tilde{5} = 4$, $\tilde{6} = 6$, получим системы $n^2(n+1)/2$ уравнений, которые после ряда преобразований приводятся к следующему виду.

Характеристика $\chi_{10} = [3(21)]$:

$$X_r \lambda_3 = 0 \; (r \neq 3), \quad X_r \lambda_6 = 0, \quad X_3(\lambda_3 - 2/3\varphi) = 0, \tag{6}$$

$$\gamma_{213} = \frac{1}{2} e_3 X_3 \varphi, \quad \gamma_{312} = \gamma_{321} = -e_3 X_3 \varphi,$$

$$\gamma_{345} = \gamma_{354} = \frac{e_5 X_3 \varphi}{\lambda_3 - \lambda_5}, \quad \gamma_{366} = \frac{e_6 X_3 \varphi}{\lambda_3 - \lambda_6},$$

γ_{56r} произвольны, остальные инварианты γ_{pqr} равны нулю.

Характеристика $\chi_{11} = [(32)1]$:

$$X_r\lambda_5 = 0, \quad X_r\lambda_6 = 0\ (r \neq 6), \quad X_6(\lambda_6 - 2\varphi) = 0, \tag{7}$$

$$\gamma_{163} = \gamma_{262} = \gamma_{361} = \frac{e_3X_6\varphi}{\lambda_5 - \lambda_6}, \quad \gamma_{263} = \gamma_{362} = -\frac{e_3X_6\varphi}{(\lambda_5 - \lambda_6)^2},$$

$$\gamma_{363} = \frac{e_3X_6\varphi}{(\lambda_5 - \lambda_6)^3}, \quad \gamma_{564} = \gamma_{465} = \frac{e_5X_6\varphi}{\lambda_5 - \lambda_6}, \quad \gamma_{565} = -\frac{e_5X_6\varphi}{(\lambda_5 - \lambda_6)^2},$$

$$\gamma_{25r} = \gamma_{34r},$$

γ_{35r} произвольны, остальные инварианты γ_{pqr} равны нулю.

Характеристика $\chi_{12} = [(321)]$:

$$X_r\lambda_6 = 0, \quad \gamma_{25r} = \gamma_{34r}, \tag{8}$$

γ_{ksr} $(k, s = 3, 5, 6,\ k \neq s)$ произвольны, остальные инварианты γ_{pqr} равны нулю.

3. h-пространства типа [3(21)]. Известно, чтобы система линейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$X_q\theta = \underset{q}{\xi^i}\, \partial_i\theta = 0, \quad (q = 1, \ldots, m, i = 1, \ldots, 6),$$

где $\underset{q}{\xi^i}$– компоненты введенного выше репера, была вполне интегрируемой, т. е. чтобы она допускала $6 - m$ независимых решений, необходимо и достаточно, чтобы все коммутаторы операторов системы ([3], см. также [1])

$$(X_q, X_r)\theta = X_qX_r\theta - X_rX_q\theta = \sum_{p=1}^{6} e_p(\gamma_{pqr} - \gamma_{prq})X_{\tilde{p}} \tag{9}$$

линейно выражались через операторы X_q.

Вычислив с помощью (6) коммутаторы операторов X_i для h-пространства типа [3(21)]:

$$(X_1, X_2) = (X_1, X_4) = (X_2, X_4) = 0, \tag{10}$$

$$(X_1, X_3) = e_2(\gamma_{213} - \gamma_{231})X_2, \quad (X_2, X_3) = e_1(\gamma_{123} - \gamma_{132})X_3,$$

$$(X_3, X_4) = e_5\gamma_{534}X_4, \quad (X_1, X_5) = -e_6\gamma_{651}X_6, \quad (X_1, X_6) = -e_5\gamma_{561}X_4,$$

$$(X_2, X_5) = -e_6\gamma_{652}X_6, \quad (X_2, X_6) = -e_5\gamma_{562}X_4,$$

$$(X_3, X_5) = e_4\gamma_{435}X_5 - e_6\gamma_{653}X_6, \quad (X_4, X_5) = -e_6\gamma_{654}X_6,$$

$$(X_3, X_6) = e_6\gamma_{636}X_6 - e_5\gamma_{563}X_4, \quad (X_4, X_6) = -e_5\gamma_{564}X_4,$$

$$(X_5, X_6) = -e_5\gamma_{565}X_4 + e_6\gamma_{656}X_6,$$

после преобразования координат $x^{i'} = \theta^i(x)$, получим

$$\underset{\alpha}{\xi^i} = P_\alpha(x)\delta_\alpha{}^i, \quad \underset{3}{\xi^\gamma} = \underset{5}{\xi^\beta} = \underset{6}{\xi^\beta} = \underset{6}{\xi^5} = 0, \tag{11}$$

где $\alpha = 1, 2, 4$, $\gamma = 1, 4, 5, 6$, $\beta = 1, 2, 3$. Здесь θ^i являются решениями вполне интегрируемых систем из (10) $X_p\theta = 0$ $(p \neq 3)$, $X_q\theta = 0$ $(q \neq 5)$, $X_r\theta = 0$ $(r \neq 1)$, $X_1\theta = X_2\theta = X_3\theta = X_4\theta = 0$, $X_1\theta = X_4\theta = X_5\theta = X_6\theta = 0$ и $X_1\theta = X_2\theta = X_3\theta = 0$. Первые три системы имеют по одному решению, соответственно θ^3, θ^5 и θ^1, четвертая система – два независимых решения θ^5 и θ^6. Пятая система имеет два решения θ^2 и θ^3, а шестая – три решения θ^4, θ^5, θ^6.

С помощью этих равенств из уравнений (6), не содержащих γ_{pqr}, найдем

$$\varphi = \frac{3}{2}f_3 + c, \quad f_i = \lambda_i, \tag{12}$$

где $f_1 = f_2 = f_3(x^3)$ – произвольные функции указанного переменного, $f_4 = f_5 = f_6 = \lambda$ – const.

Интегрируя систему уравнений, полученную из (10), с учетом формул (6), (11) и (12), а также [1]

$$g^{ij} = \sum_{h=1}^{6} e_h \underset{h}{\xi^i}\underset{\tilde{h}}{\xi^j},$$

после преобразования координат найдем

$$\underset{1}{\xi^1} = \underset{2}{\xi^2} = 1, \quad \underset{3}{\xi^2} = -\frac{\epsilon x^1}{2A}, \quad \underset{3}{\xi^3} = \frac{1}{2A}, \quad \underset{4}{\xi^4} = \underset{5}{\xi^5} = (f_3 - \lambda)^{-3/2},$$

$$g^{44} = e_4(f_3 - \lambda)^{-3}(\Sigma + \theta(x^5, x^6)), \quad g^{45} = e_4(f_3 - \lambda)^{-3}, \quad g^{66} = e_6(f_3 - \lambda)^{-3}.$$

Вычислив компоненты тензоров g_{ij}, получим

$$g_{ij}dx^i dx^j = e_3\{(dx^2)^2 + 4Adx^1dx^3 + 2\epsilon x^1 dx^2 dx^3 + (\epsilon x^1)^2(dx^3)^2\} + \tag{13}$$

$$+ e_4(f_3 - \lambda)^3\{2dx^4dx^5 - (\Sigma + \omega)(dx^5)^2\} + e_6(f_3 - \lambda)^3(dx^6)^2.$$

Здесь

$$A = \epsilon x^2 + \theta(x^3), \quad \Sigma = 3(f_3 - \lambda)^{-1}, \tag{14}$$

$f_3 = \epsilon x^3$, $\epsilon = 0, 1$, $\theta(x^3), \omega(x^5, x^6)$ – функции своих переменных; c, λ – const. Из полученных результатов, используя формулы [1]

$$\underset{h}{\xi}_i = g_{ij} \underset{h}{\xi}^j, \quad a_{ij} = \sum_{h,l=1}^{6} e_h e_l \bar{a}_{hl} \underset{\tilde{l}}{\xi}_i \underset{\tilde{l}}{\xi}_j,$$

найдем

$$a_{ij}dx^i dx^j = f_3 g_{i_1 j_1} dx^{i_1} dx^{j_1} + \tag{15}$$

$$+2g_{13}dx^2dx^3 + 4A\epsilon x^1(dx^3)^2 + \lambda g_{i_2 j_2} dx^{i_2} dx^{j_2} + g_{45}(dx^5)^2,$$

$$h_{ij} = a_{ij} + (3\epsilon x^3 + c)g_{ij}, \tag{16}$$

где $i_1, j_1 = 1, 2, 3$, $i_2, j_2 = 4, 5, 6$.

4. h-пространства типа [(32)1]. В этом случае коммутаторы операторов имеют вид

$$(X_1, X_2) = -e_5\gamma_{521}X_4, \quad (X_1, X_3) = -e_4\gamma_{431}X_5 - e_5\gamma_{531}X_4, \tag{17}$$

$$(X_1, X_4) = -e_3\gamma_{341}X_1, \quad (X_1, X_5) = -e_2\gamma_{251}X_2 - e_3\gamma_{351}X_1,$$

$$(X_1, X_6) = -e_3\gamma_{361}X_1, \quad (X_2, X_3) = e_5\gamma_{523}X_4 - e_4\gamma_{432}X_5 - e_5\gamma_{532}X_4,$$

$$(X_2, X_4) = e_5\gamma_{524}X_4 - e_3\gamma_{342}X_1,$$

$$(X_2, X_5) = e_5\gamma_{525}X_4 - e_2\gamma_{252}X_2 - e_3\gamma_{352}X_1,$$

$$(X_2, X_6) = -e_3\gamma_{362}X_1 - e_2\gamma_{262}X_2 + e_5\gamma_{526}X_4,$$

$$(X_3, X_4) = -e_3\gamma_{343}X_1 + e_4\gamma_{434}X_5 + e_5\gamma_{534}X_4,$$

$$(X_3, X_5) = -e_2\gamma_{253}X_2 + e_4\gamma_{435}X_5 - e_3\gamma_{353}X_1 + e_5\gamma_{535}X_4,$$

$$(X_3, X_6) = -e_1\gamma_{163}X_3 - e_2\gamma_{263}X_2 - e_3\gamma_{363}X_1 + e_4\gamma_{436}X_5 + e_5\gamma_{536}X_4,$$

$$(X_4, X_5) = -e_2\gamma_{254}X_2 + e_3(\gamma_{345} - \gamma_{354})X_1,$$

$$(X_4, X_6) = e_3\gamma_{346}X_1 - e_5\gamma_{564}X_4,$$

$$(X_5, X_6) = e_2\gamma_{256}X_2 + e_3\gamma_{356}X_1 - e_4\gamma_{465}X_5 - e_5\gamma_{565}X_4.$$

Ясно, что системы $X_p\theta = 0$ $(p \neq 3)$, $X_q\theta = 0$ $(q \neq 6)$ вполне интегрируемые и имеют по одному решению θ^3 и θ^6. Системы $X_1\theta = X_2\theta = X_4\theta = X_6\theta = 0$, $X_1\theta = X_4\theta = X_6\theta = 0$, $X_1\theta = X_6\theta = 0$ и уравнение $X_6\theta = 0$ также вполне интегрируемые. Первая система имеет решения θ^3 и θ^5, вторая система – θ^2, θ^3 и θ^6, третья система – θ^2, θ^3, θ^4 и

θ^5. Уравнение $X_6\theta = 0$ имеет решение θ^q ($q \neq 6$). Сделав преобразования координат $x^{i'} = \theta^i(x)$, в новой координатной системе, опустив штрихи, получим

$$\underset{s}{\xi}^i = P(x)\delta_s{}^i, \quad \underset{2}{\xi}^r = \underset{2}{\xi}^5 = \underset{3}{\xi}^6 = \underset{4}{\xi}^r = \underset{4}{\xi}^2 = \underset{4}{\xi}^5 = \underset{5}{\xi}^r = 0, \tag{18}$$

где $s = 1, 6$, $r = 3, 6$.

Из уравнений (7), не содержащих γ_{pqr}, найдем

$$\varphi = \frac{1}{2}f_6 + c, \quad f_i = \lambda_i, \tag{19}$$

где f_6 – произвольная функция переменного x^6, $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = \lambda$ – const.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых производных $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ в соотношениях (17), мы получим систему из 60 уравнений на компоненты векторов репера, из которой после подходящего преобразования координат получим

$$\underset{1}{\xi}^1 = \underset{2}{\xi}^2 = \underset{3}{\xi}^3 = (f_6 - \lambda)^{-1/2}, \quad \underset{6}{\xi}^6 = 1,$$

$$g^{11} = e_3(f_6 - \lambda)^{-1}\{(f_6 - \lambda)^{-2} + \theta(x^3, x^5)\}, \quad g^{12} = e_3(f_6 - \lambda)^{-2},$$

$$g^{44} = e_5(f_6 - \lambda)^{-1}\{(f_6 - \lambda)^{-1} + \omega(x^3, x^5)\}, \quad g^{45} = e_5(f_6 - \lambda)^{-1}.$$

Из предыдущего следует, что тензоры g_{ij}, a_{ij} и h_{ij} имеют вид

$$g_{ij}dx^idx^j = e_3(f_6 - \lambda)\{(dx^2)^2 + 2dx^1dx^2 + \omega(dx^3)^2\} - \tag{20}$$

$$-2e_3dx^2dx^3 + e_4(f_6 - \lambda)\{2dx^4dx^5 - \omega(dx^5)^2\} - e_5(dx^5)^2 + e_6(dx^6)^2,$$

$$a_{ij}dx^idx^j = \lambda g_{i_1j_1}dx^{i_1}dx^{j_1} + 2g_{22}dx^2dx^3 + \tag{21}$$

$$+g_{23}(dx^3)^2 + g_{45}(dx^5)^2 + e_6f_6(dx^6)^2,$$

$$h_{ij} = a_{ij} + (f_6 + c)g_{ij}, \tag{22}$$

где $f_6(x^6), \theta(x^3, x^5), \omega(x^3, x^5)$– произвольные функции указанных переменных, c, λ – const, $i_1, j_1 = 1, 2, 3, 4, 5$.

5. h-пространства типа [(321)]. В случае h-пространства типа [(321)] функция $\varphi = \text{const}$, отсюда тензор h_{ij} является ковариантно-постоянным. Опуская дальнейшие вычисления, выпишем результат:

$$g_{ij}dx^idx^j = e_3\{(dx^2)^2 + 2dx^1dx^3 - 2dx^2dx^3 + \theta(dx^3)^2\} + \tag{23}$$

$$+e_4\{2dx^4dx^5 - \omega(dx^5)^2\} + e_6(dx^6)^2,$$

$$a_{ij}dx^idx^j = \lambda g_{ij}dx^idx^j + 2e_3dx^2dx^3 + e_3(dx^3)^2 + e_4(dx^5)^2, \tag{24}$$

$$h_{ij} = a_{ij} + cg_{ij}, \tag{25}$$

где θ, ω – произвольные функции переменных x^3, x^5, x^6, c, λ – const.

Сформулируем полученные результаты в виде следующей теоремы

Теорема 1. *Если тензор h_{ij} типов* [3(21)], [(32)1], [(321)] *и функция φ удовлетворяют в V^6 уравнениям Эйзенхарта (1), то существует голономная система координат, в которой тензоры g_{ij}, h_{ij} и функция φ определяются формулами* (12)–(16), (19)–(22), (23)–(25).

6. Квадратичные первые интегралы уравнений геодезических h-пространств типов [3(21)], [(32)1], [(321)]. Каждому решению h_{ij} уравнения (1) соответствует квадратичный первый интеграл уравнений геодезических

$$(h_{ij} - 4\varphi g_{ij})\dot{x}^i\dot{x}^j = \text{const}, \tag{26}$$

где $\dot{x}^i$ – касательный вектор геодезической.

Следовательно, квадратичные первые интегралы уравнений геодезических h-пространств типов [3(21)], [(32)1], [(321)] определяются формулой (26), где тензоры h_{ij}, g_{ij} и функция φ определены в Теореме 1.

Автор благодарен профессору А. В. Аминовой за постановку задачи и за советы в ее решении.

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 10–02–00509.

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] А. В. Аминова, УМН **50**(1), 69 (1995).

[2] А. З. Петров, *О геодезическом отображении римановых пространств неопределенной метрики.* Уч. зап. Казан. ун-та. **109**(3), 7 (1949).

[3] Л. П. Эйзенхарт, *Риманова геометрия* (Москва, ИЛ, 1948).

Печатается по представлению Отделения теоретической физики

Поступила в редакцию 4 июля 2011 г.