УДК 533.951

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

Ю.М. Алиев

Рассмотрена модуляционная неустойчивость поверхностных электромагнитных волн конечной амплитуды. В результате развития неустойчивости возбуждаются объемные ионно-звуковые волны, уходящие от границы вглубь плазмы. Получена система уравнений, описывающая нелинейную динамику поверхностных электромагнитных волн, на основе которой получено выражение для инкремента модуляционной неустойчивости.

Линейная теория параметрического взаимодействия сильного электромагнитного излучения, взаимодействующего с ограниченной плазмой и приводящего к раскачке поверхностных электромагнитных волн (ПЭВ), развита достаточно полно (см., например, [1 – 3]). В настоящем сообщении рассматривается нелинейная динамика ПЭВ, распространяющихся вдоль границы плазмы, занимающей полупространство $z > 0$. На границе плазмы медленно меняющаяся амплитуда магнитной компоненты поля ПЭВ $H(x,t)$, распространяющейся вдоль оси x и имеющей частоту ω_0 и волновой вектор k_0, подчиняется уравнению

$$\hat{D}(x,t)H(x,t) = \alpha \int\limits_{\infty}^{0} \delta\epsilon(x,z,t)e^{-2\kappa_0 z} dz H(x,t), \qquad (1)$$

где $\hat{D}(x,t) \equiv D_0\left(k_0 + i\frac{\partial}{\partial x};\, \omega_0 + i\frac{\partial}{\partial t}\right)$ – оператор, соответствующий линейному дисперсионному уравнению

$$D_0(k_0,\omega_0) = \sqrt{k_0^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} + \frac{\kappa_0(k_0,\omega_0)}{\epsilon_0(\omega_0)}.$$

Здесь $\epsilon_0 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_0^2}$, $\kappa_0 = \sqrt{k_0^2 - \frac{\omega_0^2}{c^2}\epsilon_0}$, ω_{pe} – электронная плазменная частота, $\delta\epsilon(x,z,t) = -\delta n(x,z,t)/n_{cr}$ ($n_{cr} \equiv m\omega_0^2/4\pi e^2$) – вариация диэлектрической проницаемости, обусловленная пондеромоторной силой и подчиняющаяся уравнению

$$\frac{\partial^2 \delta\epsilon}{\partial t^2} - V_s^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \delta\epsilon = \beta |H(x,t)|^2 e^{-2\kappa_0 z}, \qquad (2)$$

где V_s – ионно-звуковая скорость.

Связанное с $\delta\epsilon$ низкочастотное возмущение потенциала в плазме $\varphi(x,z,t)$ и в вакууме $\varphi_v(x,z,t)$ определяется уравнением Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \eta \frac{\partial^2 \delta\epsilon}{\partial t^2}; \ \frac{\partial^2 \varphi_v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_v}{\partial z^2} = 0; \ \eta \equiv -\frac{m_i}{e_i} \frac{n_0}{n_{cr}}, \qquad (3)$$

дополненным граничными условиями непрерывности потенциала и равенства нулю нормальной компоненты скорости ионов на границе плазмы $z = 0$:

$$\varphi(x,t,z=+0) = \varphi_v(x,t,z=-0), \ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=+0} = 0. \qquad (4)$$

Параметры α и β определяются дисперсионными свойствами ПЭВ и будут приведены ниже для ряда частных случаев.

Будем искать решение системы уравнений (1) – (4) в виде бегущей со скоростью V вдоль оси x волны и введем новые переменные $\xi = x - Vt$ и $\tau = t$, в которых (1) – (3) принимают вид

$$\hat{D}(\xi,\tau) H(\xi,\tau) = \alpha H(\xi,\tau) \int_{\infty}^{0} \delta\epsilon(\xi,z,\tau) e^{-2\kappa_0 z} dz, \qquad (5)$$

$$(V^2 - V_s^2) \frac{\partial^2 \delta\epsilon}{\partial \xi^2} - V_s^2 \frac{\partial^2 \delta\epsilon}{\partial z^2} = \beta |H(\xi,\tau)|^2 e^{-2\kappa_0 z}, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \eta V^2 \frac{\partial^2 \delta\epsilon}{\partial \xi^2}. \qquad (7)$$

При получении (6) было учтено условие адиабатичности $\frac{\partial}{\partial \tau} \ll V \frac{\partial}{\partial \xi}$, позволившее пренебречь временной производной от низкочастотных возмущений.

Решение уравнения (6) ищем в виде

$$\delta\epsilon(\xi,z,\tau) = \delta\tilde{\epsilon}(\xi + \sqrt{M^2-1}z, \tau) + \overline{\delta\epsilon}(\xi,\tau) e^{-2\kappa_0 z}, \qquad (8)$$

где $M^2 = V^2/V_s^2 > 1$ и $\overline{\delta\epsilon}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\overline{\delta\epsilon}}{\partial\xi^2} - \kappa_s^2\overline{\delta\epsilon} = \frac{\beta|H(\xi,\tau)|^2}{V_s^2(M^2-1)}, \ \kappa_s^2 \equiv \frac{4\kappa_0^2}{M^2-1}. \tag{9}$$

Подставляя (8) в (7), находим низкочастотный потенциал

$$\varphi(\xi,z,\tau) = \frac{V^2}{M^2}\eta\delta\tilde{\epsilon}(\xi+\sqrt{M^2-1}z,\tau) + \frac{V^2}{4\kappa_0^2}\eta\frac{\partial^2\overline{\delta\epsilon}}{\partial\xi^2}e^{-2\kappa_0 z}. \tag{10}$$

После подстановки (10) в граничные условия (4), находим связь

$$\delta\tilde{\epsilon}(\xi,\tau) = \frac{M^2}{2\kappa_0\sqrt{M^2-1}}\frac{\partial\overline{\delta\epsilon}(\xi,\tau)}{\partial\xi}, \tag{11}$$

позволяющую представить (8) в виде

$$\delta\epsilon(\xi,z,\tau) = \overline{\delta\epsilon}(\xi,\tau)e^{-2\kappa_0 z} + \frac{M^2}{2\kappa_0\sqrt{M^2-1}}\left.\frac{\partial\overline{\delta\epsilon}(\xi',\tau)}{\partial\xi'}\right|_{\xi'=\xi+\sqrt{M^2-1}z}. \tag{12}$$

С помощью (12) преобразуем интеграл, стоящий в правой части (5):

$$\int\limits_\infty^0 \delta\epsilon(\xi,z,\tau)e^{-2\kappa_0 z}dz = -\frac{\overline{\delta\epsilon}(\xi,\tau)}{4\kappa_0} + \frac{M^2}{2\kappa_0\sqrt{M^2-1}}\int\limits_\infty^0 \left.\frac{\partial\overline{\delta\epsilon}(\xi',\tau)}{\partial\xi'}\right|_{\xi'=\xi+\sqrt{M^2-1}z} e^{-2\kappa_0 z}dz. \tag{13}$$

Делая в правой части (13) замену переменной интегрирования $z = \frac{\xi'-\xi}{\sqrt{M^2-1}}$, имеем

$$\int\limits_\infty^0 \delta\epsilon(\xi,z,\tau)e^{-2\kappa_0 z}dz = -\frac{\overline{\delta\epsilon}(\xi,\tau)}{4\kappa_0} + \frac{M^2}{2\kappa_0(M^2-1)}\int\limits_\infty^\xi \frac{\partial\overline{\delta\epsilon}(\xi',\tau)}{\partial\xi'}e^{-\kappa_s(\xi'-\xi)}d\xi',$$

где $\kappa_s = 2\kappa_0/\sqrt{M^2-1}$.

Таким образом, в окончательном виде нелинейная динамика ПЭВ описывается следующей системой интегро-дифференциальных уравнений:

$$\hat{D}(\xi,\tau)H(\xi,\tau) = -\alpha H(\xi,\tau)\left[\frac{\overline{\delta\epsilon}(\xi,\tau)}{4\kappa_0} - \frac{M^2}{2\kappa_0(M^2-1)}\int\limits_\infty^\xi \frac{\partial\overline{\delta\epsilon}(\xi',\tau)}{\partial\xi'}e^{-\kappa_s(\xi'-\xi)}d\xi'\right], \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2\overline{\delta\epsilon}(\xi,\tau)}{\partial\xi^2} - \kappa_s^2\overline{\delta\epsilon}(\xi,\tau) = \frac{\beta}{V_s^2(M^2-1)}|H(\xi,\tau)|^2. \tag{15}$$

Второе слагаемое в правой части (14) отвечает излучению волны плотности плазмы под действием модуляций ПЭВ. Полагая скорость V, равной групповой скорости ПЭВ

$V_g = \partial\omega_0/\partial k_0$, где $\omega_0 = \omega_0(k_0)$ – решение линейного дисперсионного уравнения для ПЭВ, представим оператор $\hat{D}(\xi,\tau)$ в виде $\hat{D}(\xi,\tau) = i\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{1}{2}\frac{\partial V_g}{\partial k_0}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}$.

Система (14) – (15) имеет решение в виде нелинейной ПЭВ с постоянной амплитудой

$$H(\xi,\tau) = \frac{H_0}{2}e^{-i\varphi_0\tau}, \tag{16}$$

где $\varphi_0 = \frac{\alpha\beta|H_0|^2}{4\kappa_0\kappa_s V_g^2}$.

В работе [4], где эффект излучения не учитывался, было показано, что ПЭВ конечной амплитуды является модуляционно устойчивой. Покажем, что при учете излучения ионно-звуковых волн, ПЭВ модуляционно неустойчива. Зададим на фоне плоской волны (16) малое возмущение амплитуды и фазы:

$$|H(\xi,\tau)| = \frac{H_0}{2} + \frac{\delta H}{2}e^{i\Omega\tau - iq\xi},$$
$$\varphi\tau = \varphi_0\tau + \frac{\delta\varphi}{2}e^{i\Omega\tau - iq\xi}, \tag{17}$$
$$\overline{\delta\epsilon} = \overline{\delta\epsilon_0} + \frac{\overline{\delta\epsilon_1}}{2}e^{i\Omega\tau - iq\xi}.$$

Подставив (17) в (14) и (15), получаем дисперсионное уравнение

$$\Omega^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V_g}{\partial k_0}\right)^2 q^4 + \frac{\alpha\beta|H_0|^2\frac{\partial V_g}{\partial k_0}q^2}{16\kappa_0 V_g^2(iq+\kappa_s)^2}. \tag{18}$$

Учитывая, что для ПЭВ во всей области дисперсии $\alpha\beta\frac{\partial V_g}{\partial k_0} > 0$, находим из (18), что неустойчивость возможна ($\gamma = \mathrm{Im}\Omega > 0$) при условиях

$$q \gtrsim \kappa_s,\ \alpha\beta|H_0|^2/4\kappa_0 V_g^2 > \left|\frac{\partial V_g}{\partial k_0}\right| q^4,$$
$$\gamma = \frac{|H_0|}{4|V_g|}\left(\frac{\alpha\beta\partial V_g/\partial k_0}{\kappa_0}\right)^{1/2}. \tag{19}$$

Условие $q \gtrsim \kappa_s$ имеет простой физический смысл. Взаимодействие между ПЭВ и звуковой волной будет наиболее сильным, если за период низкочастотных модуляций, равный $(qV_g)^{-1}$, звуковая волна не успевает покинуть скин-слой. Учитывая, что время прохождения звуковой волной скин-слоя равно $(\kappa_0 V_s)^{-1}$, получаем указанное требование. Заметим, что в этих условиях локальный вклад в правую часть (12) оказывается малым по сравнению со вторым слагаемым, описывающим излучение ионно-звуковых волн.

В заключение приведем явный вклад коэффициентов α и β.

В квазистатическом пределе ($\dot{\omega}_0 \gg k_0 c$) линейный закон дисперсии ПЭВ имеет вид

$$\omega_0(k_0) = \frac{\omega_{pe}}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{8k_0^2c^2}\right), \tag{20}$$

при этом

$$\alpha = \frac{\omega_{pe}k_0}{2\sqrt{2}},\ \beta|H_0|^2 = -\frac{4k_0^2|E_{0z}|^2}{\pi n_0 m_i},$$

где m_i – масса ионов, n_0 – невозмущенная плотность плазмы, $E_{0z}(+0)$ – амплитуда нормальной к границе напряженности ПОВ в плазме.

В этом случае, согласно (19):

$$\gamma = \omega_0\left(\frac{3|E_{0z}|^2}{4\pi n_0 T_e}\right)^{1/2}\frac{V_s}{c}2\sqrt{2}\frac{k_0^2c^2}{\omega_{pe}^2}, \tag{21}$$

где T_e – температура электронов.

В пределе малого замедления $\dot{\omega}_0 \approx k_0 c$ закон дисперсии ПЭВ имеет вид

$$\omega_0(k_0) = k_0 c\left(1 - \frac{k_0^2c^2}{2\omega_{pe}^2}\right), \tag{22}$$

при этом

$$\alpha = \omega_0\frac{\omega_{pe}}{c}\epsilon_0^{-2};\ \beta|H_0|^2 = -\epsilon_0^2\frac{\omega_{pe}^4}{k_0^2}\frac{|E_{0z}(+0)|^2}{\pi n_0 m_i}. \tag{23}$$

Отсюда, согласно (19), имеем

$$\gamma = \omega_0\left(\frac{3|E_{0z}|^2}{64\pi n_0 T_e}\right)^{1/2}\frac{V_s}{c}. \tag{24}$$

Автор выражает благодарность за частичную финансовую поддержку РФФИ, проект N 98-02-16435.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Алиев Ю. М., Ферленги Э. ЖЭТФ, **57**, 16 (1969).

[2] Алиев Ю. М., Градов О. М., Кирий А. Ю. ЖЭТФ, **63**, 12 (1972).

[3] Алиев Ю. М., Градов О. М., Кирий А. Ю. Вестник МГУ, Физика, астрономия, N 1, 77 (1974).

[4] Atanasov V., Mateev E., and Shelyazkov I. J. Plasma Phys., **26**, 231 (1981).

Поступила в редакцию 27 декабря 2000 г.