УДК 533.9

О ТОЧНОСТИ БГК МОДЕЛИ ДЛЯ ДРЕЙФА ИОНОВ В СОБСТВЕННОМ ГАЗЕ

С. А. Майоров, В. Н. Цытович

Построена модель столкновений ионов с атомами газа, учитывающая резонансную перезарядку ионов, поляризационное взаимодействие и упругое (газокинетичесое) взаимодействие. Выполнены расчеты характеристик дрейфа ионов в постоянном электрическом поле, проведено сравнение с результатами на основе модельного интеграла столкновений Бхатнагара, Гросса, Крука (интеграл БГК). Показано, что в силу специфики ион-атомных столкновений использование интеграла столкновений БГК приводит к большим ошибкам.

Ключевые слова: дрейф ионов; модель БГК.

Характеристики ионного потока могут быть определены путем решения кинетического уравнения Больцмана для функции распределения ионов $f(v)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\nabla f + \frac{eE}{m}\frac{\partial f}{\partial v} = I_{\mathrm{st}}(f), \tag{1}$$

где e – заряд, m – масса ионов, $I_{\mathrm{st}}(f)$ – интеграл столкновений.

В слабоионизованной плазме часто можно пренебречь упругими столкновениями ионов с атомами, электронами и ионами. Поскольку в случае столкновений ионов с атомами собственного газа обычно наибольшим является сечение резонансной перезарядки иона, то рассмотрим кинетическое уравнение (1) в пространственно-однородном случае при постоянном электрическом поле, учитывая только резонансную перезарядку ионов:

$$\frac{eE}{m}\frac{\partial f}{\partial u} = \int [f(v')\varphi(v) - f(v)\varphi(v')]|v - v'|\sigma_{\mathrm{res}} n_a dv', \tag{2}$$

где u – компонента скорости вдоль направления электрического поля, σ_{res} – сечение резонансной перезарядки, n_a – плотность атомов, функции распределения ионов и атомов

Учреждение Российской академии наук Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, 119991 Москва, ул. Вавилова, 38, Россия; e-mail: mayorov_sa@mail.ru + may@fpl.gpi.ru.

нормированы на единицу: $\int f(v)dv = \int \varphi(v)dv = 1$. Уравнение (2) описывает процесс переноса ионов, который носит эстафетный характер – эта модель предложена Л. А. Сена [1, 2]. Согласно этой модели, скорость иона после столкновения равна скорости того атома, с которым он столкнулся. Эта модель не учитывает изменение скорости атома в процессе столкновения.

Рассмотрим простую, но важную модель движения ионов в случае выполнения двух условий: 1) скорость дрейфа значительно превышает тепловую скорость атомов $v_d >> (T_i/m)^{1/2}$; 2) происходят столкновения только одного типа – с резонансной перезарядкой ионов на атомах собственного газа. При выполнении этих условий можно пренебречь тепловым движением атомов и полагать, что ионы движутся равноускоренно в постоянном электрическом поле $E > 0$, останавливаясь после каждого акта столкновения.

Условие $v_d >> (T_i/m)^{1/2}$ может быть выполнено с хорошей точностью либо в случае большой напряженности электрического поля, либо при низкой температуре газа. Хотя столкновения с перезарядкой играют обычно наиболее важную роль, столкновения другого типа оказывают существенное влияние на характеристики распределения ионов по скоростям. Помимо столкновений с перезарядкой существенную роль могут играть поляризационные и газокинетические столкновения. В случае таких столкновений ион не останавливается, а рассеивается на неподвижном центре в системе центра масс атом – ион. Хорошим приближением такого вида столкновений является модель твердых сфер, т.е. изотропного рассеивания. Без учета этих столкновений нельзя учесть разогрев ионов в поперечном направлении.

В пренебрежении тепловой энергией атомов и при учете только столкновений с перезарядкой кинетическое уравнение Больцмана имеет вид [1, 2]:

$$\frac{eE}{m}\frac{\partial f}{\partial u} = -f\frac{u}{\lambda_{\text{st}}}, \tag{3}$$

$$f(u<0) = 0,$$

$$f(0) = c_1.$$

Если сечение резонансной перезарядки зависит от скорости, то функция распределения ионов имеет вид [1, 2]:

$$f(u) = c_1 \Theta(u) \exp\left(-\frac{m}{eE}\int_0^u n_a \sigma_{\text{res}}(u')u'du'\right), \tag{4}$$

где $\Theta(u)$ – функция Хэвисайда, c_1 – константа, определяемая из условия нормировки.

Если сечение резонансной перезарядки и средняя длина свободного пробега иона $\lambda_{\rm st} = 1/\sigma_0 n_a$ не зависят от скорости, то решение (3) имеет вид:

$$f(u) = \Theta(u)\left(\frac{2m}{\pi T_E}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mu^2}{2T_E}\right), \tag{5}$$

где $T_E \equiv eE\lambda_{\rm st}$. Распределение (5) является половинкой распределения Максвелла с температурой, равной энергии, набираемой ионом на средней длине свободного пробега. Следовательно, средняя кинетическая энергия ионов, обусловленная движением в направлении поля, равна $\frac{1}{2}m\langle u^2\rangle = \frac{1}{2}T_E = \frac{1}{2}eE\lambda_{\rm st}$. Плотность потока ионов для этого распределения равна $J_i = n_i(2eE\lambda_{\rm st}/\pi m)^{1/2}$, средняя скорость ионов (скорость дрейфа) равна $u_d = (2eE\lambda_{\rm st}/\pi m)^{1/2} = (2T_E/\pi m)^{1/2}$.

По аналогии с гидродинамическим приближением часто полагается, что дрейф ионов в сильном поле описывается сдвинутой функцией распределения Максвелла:

$$f_0(\bar{v}) = \left(\frac{m}{2\pi T_i}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m[(u-u_d)^2 + v^2 + w^2]}{2T_i}\right). \tag{6}$$

Это распределение имеет два параметра – среднюю скорость ионов u_d (скорость дрейфа) и температуру ионов T_i, которая определяет тепловой разброс скоростей ионов $V_T = (T_i/m)^{1/2}$, здесь направление поля и дрейфа совпадает с осью x.

Для учета влияния столкновений часто используется модельный интеграл столкновений Бхатнагара, Гросса, Крука (интеграл БГК) [1, 3, 4]:

$$I_{\rm st} = \frac{\varphi - f}{\tau_0}, \tag{7}$$

который описывает релаксацию функции распределения ионов f к равновесной функции распределения атомов φ с характерным временем релаксации τ_0, которая полагается константой. Интеграл БГК качественно верно описывает процесс релаксации плазмы к равновесию в случае незначительного отклонения от него. Но он неприменим, если частота столкновений ионов с атомами зависит от их относительной скорости, или отклонение от равновесия велико.

Уравнение переноса ионов в пространственно-однородном случае имеет вид: $V_E\partial f/\partial u = \varphi(u) - f(u)$, где $V_E = eE\tau_0/m$. Его решение имеет вид:

$$f_E(u) = \frac{1}{V_E}\int\limits_{-\infty}^{u} \varphi(u')\exp\left(-\frac{u-u'}{V_E}\right)du'. \tag{8}$$

В случае субтепловой скорости потока, когда $u_d \leq (T/m)^{1/2}$, и максвелловского распределения атомов $\varphi(u) = (m/2\pi T_0)^{1/2}\exp(-mu^2/2T_0)$ решение (1) с интегралом столкновений (7) имеет вид:

$$f(u) = \varphi(u)(1 + uV_E/V_T^2). \qquad (9)$$

Это распределение совпадает с разложением сдвинутого максвелловского распределения (6) при $V_E = u_d << (T/m)^{1/2}$. Как и следовало ожидать, в случае малого отклонения от равновесия использование модельного интеграла БГК дает разумный результат.

В случае большой скорости ионного потока $u_d >> V_T = \sqrt{T_0/m}$ и максвелловского распределения атомов распределение (8) имеет асимптотику:

$$f(u) = \frac{\Theta(u)}{V_E}\exp\left(-\frac{u}{V_E}\right). \qquad (10)$$

Это распределение описывает равноускоренное движение ионов в постоянном электрическом поле $E > 0$, которые останавливаются после каждого акта столкновения, вероятность которого не зависит от скоростей иона и атома. Эта противоестественная гибридная модель (взявшая свойства поляризационных и резонансных столкновений) является следствием структуры интеграла БГК при больших полях, когда $u_d >> (T/m)^{1/2}$. Она не учитывает отличие скорости иона от нуля после столкновения.

Если пренебречь тепловым движением атомов по сравнению со скоростью потока и представить функцию распределения атомов в виде $\varphi(u) = \delta(u)$, то прибыль частиц в интеграле БГК имеет вид $I^+_{\mathrm{BGK}} = \varphi/\tau_0$, убыль – $I^-_{\mathrm{BGK}} = f/\tau_0$. Для столкновений с резонансной пререзарядкой при постоянном сечении прибыль и убыль частиц имеет, соответственно, вид $I^+_{\mathrm{res}} = \varphi/\tau_0$, убыль – $I^-_{\mathrm{res}} = \sigma_0 n_a u f$. Следовательно, интеграл БГК даже на качественном уровне неправильно передает характер убыли частиц, именно этим обстоятельством объясняется радикальное отличие распределения (10) от физически разумных распределений (5) и (6).

Для поляризационных столкновений, которые характеризуются постоянным средним временем свободного пробега, убыль частиц в интеграле БГК может быть приведена к виду $I^-_{\mathrm{pol}} = f/\tau_0$. Но прибыль частиц в интеграле столкновений зависит от всей функции распределения и никоим образом не может быть аппроксимирована величиной $I^+_{\mathrm{BGK}} = \varphi/\tau_0$. Эта форма означает, что независимо от вида $f(v)$ число ионов, рассеянных вследствие столкновений в группу со скоростями v, равно числу ионов, которые рассеялись бы из этой группы в случае равновесного распределения при частоте столкновений, не зависящей от скорости [3].

Интеграл БГК не позволяет учесть следующие факторы: 1) для столкновений, характеризующихся постоянным сечением (перезарядка, газокинетические) он не учитывает зависимость вероятности столкновения от скорости; 2) для столкновений, характеризующихся постоянным средним временем свободного пробега (поляризационные столкновения) он не учитывает отличие скорости иона после акта рассеяния от нуля. Эти факторы являются определяющими при скорости дрейфа, сравнимой с тепловой скоростью атомов. Следовательно, интеграл БГК неприменим для задачи определения характеристик дрейфа ионов в собственном газе.

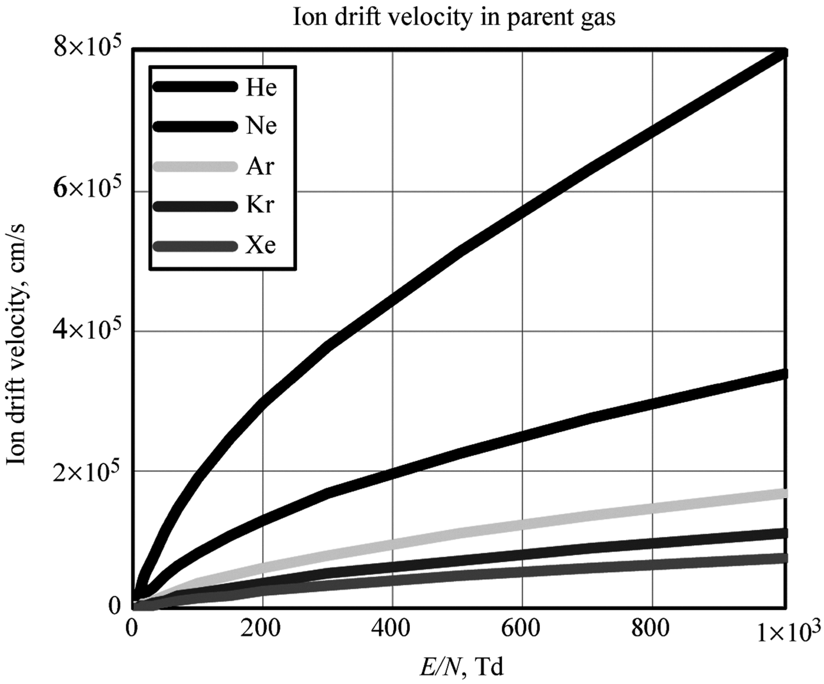

Рис. 1: *Результаты расчета скорости дрейфа иона в собственном газе в зависимости от приведенной напряженности электрического поля.*

На рис. 1 для всех инертных газов представлены результаты расчета скорости дрейфа иона в собственном газе в зависимости от напряженности электрического поля [5]. На рис. 2 представлены те же результаты, в которых скорость дрейфа нормирована на величину тепловой скорости (скорость иона с энергией, равной температуре) $W = u_d/V_T$, а поле нормировано на величину характерного "разогревающего поля": $F = E/E_T$, в котором на средней длине свободного пробега набирается энергия, равная температуре атомов – $eE_T\langle\lambda_{\rm st}\rangle = T_a$. Штрихованная кривая представляет решение

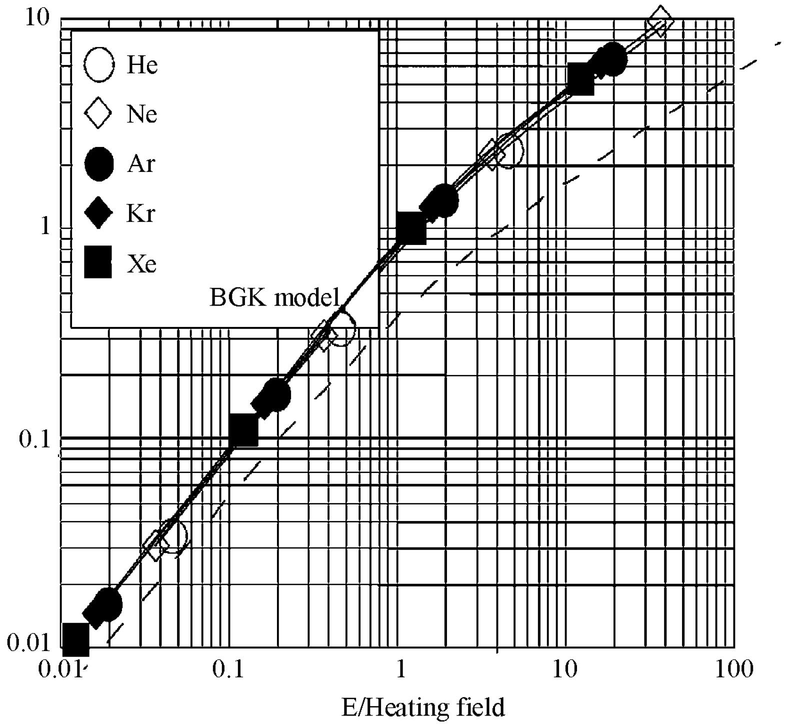

Рис. 2: *Результаты расчета скорости дрейфа иона в собственном газе в зависимости от напряженности электрического поля в безразмерных единицах. Скорость дрейфа нормирована на величину тепловой скорости (скорость иона с энергией, равной температуре атомов), поле нормировано на величину характерного "разогревающего поля", в котором на средней длине свободного пробега набирается энергия, равная температуре атомов. Штрихованная кривая – решение уравнения Больцмана с интегралом столкновений БГК.*

уравнения Больцмана с интегралом столкновений БГК из работы [6]:

$$W = \frac{F(F^{1/2}+1)}{\pi^{1/2}(1+F^{1/2}+F)}. \qquad (11)$$

Анализ показал, что отличие примерно в два раза обусловлено тем фактом, что даже в сильном поле столкновения с рассеянием назад не являются доминирующими.

На рис. 3 в зависимости от приведенной напряженности поля показана доля столкновений с рассеянием назад в системе центра масс по отношению к общему числу столкновений (в число столкновений не включены столкновения с рассеянием на малые углы).

Приведенные графики позволяют сделать следующие выводы:

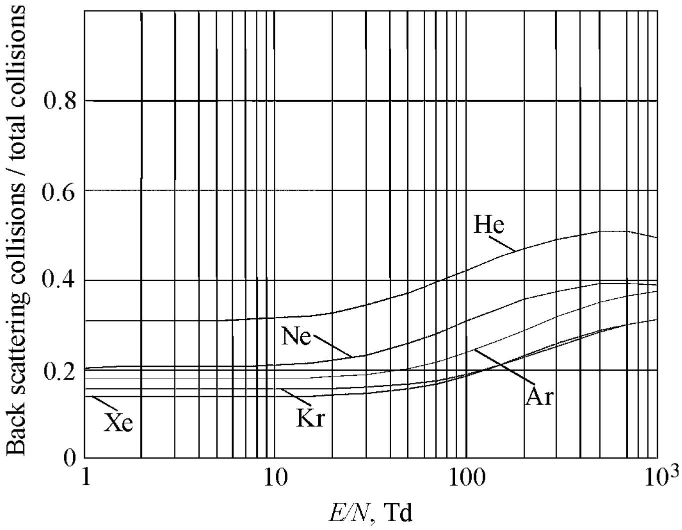

Рис. 3: *Доля столкновений с рассеянием назад по отношению к общему числу столкновений в зависимости от приведенной напряженности поля.*

1) Введение безразмерных единиц позволяет свести характеристики для различных газов к универсальным кривым;

2) Интеграл столкновений БГК для задачи о дрейфе ионов в собственном газе приводит к значительным ошибкам, что не позволяет даже на качественном уровне описывать реальные процессы (см., например, [7 – 9]);

3) Имеет место неожиданный и нетривиальный факт: хотя сечения с перезарядкой и являются наибольшими, столкновения с рассеиванием назад составляют лишь 15-45 процентов для благородных газов при 300 K (в связи с этим см. [10], где сделана попытка аппроксимации столкновений в виде суммы столкновений с изотропным рассеиванием и рассеиванием назад).

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] Б. М. Смирнов, *Физика слабоионизованного газа в задачах с решениями* (М., Наука, 1988).

[2] Л. А. Сена, ЖЭТФ **16**, 734 (1946); *Столкновения электронов и ионов с атомами газа* (М., Гостехиздат, 1948).

[3] Г. Бёрд, *Молекулярная газовая динамика* (М., Мир, 1981).

[4] D. Else, R. Kompaneets, and S. V. Vladimirov, Phys. Plasm. **16**, 062106 (2009).

[5] С. А. Майоров, Физика плазмы **35**(9), 869 (2009).

[6] V. N. Tsytovich, S. V. Vladimirov and Yu. Tyshetskiy (in press).

[7] S. A. Maiorov, T. S. Ramazanov, K. N. Dzhumagulova, et al., Phys. Plasm. **15**, 093701 (2008).

[8] С. Н. Антипов, Э. И. Асиновский, А. В. Кириллин и др., ЖЭТФ **133**(4), 948 (2008).

[9] С. Н. Антипов, М. М. Васильев, С. А. Майоров и др., ЖЭТФ **139**(3), 554 (2011).

[10] D. Piscitelli, A. V. Phelps, J. Urquijo, et al., Phys. Rev. E **63**, 046408 (2003).

Поступила в редакцию 7 июня 2011 г.