УДК 537.523

МОДЕЛЬ РАСШИРЕНИЯ ИМПУЛЬСНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАЗРЯДА В ПЛОТНОМ ГАЗЕ С УЧЁТОМ ЭЛЕКТРОННОЙ И ЛУЧИСТОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЕЙ. V. ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ИМПУЛЬСНЫЙ РАЗРЯД

У. Юсупалиев

Определены показатели подобия физических величин импульсных электрических разрядов в газах (при атмосферном давлении и выше) и их размерные инварианты относительно линейного преобразования координат и времени: $x'_i = sx_i$, $t' = st$ *(s – коэффициент сжатия/растяжения). Из инвариантности безразмерных уравнений непрерывности, движения и баланса энергии относительно линейного преобразования координат и времени установлены их безразмерные инварианты. Из условия однородности распределения давления плазмы в разрядном канале определены значения безразмерных инвариантов. С помощью этих инвариантов дифференциальные уравнения в частных производных удалось свести к обыкновенным дифференциальным уравнениям, из решений которых определены зависимости радиуса разрядного канала от времени, плотности и температуры плазмы (на оси разрядного канала) от времени для начальной стадии развития разрядов.*

Ключевые слова: подобие разрядов, показатели подобия физических величин, размерные и безразмерные инварианты импульсных сильноточных электрических разрядов в газах.

Введение. При подготовке и проведении экспериментов, а также анализе их результатов большую помощь оказывают законы подобия исследуемого явления [1–6]. Знание

ИОФ РАН, 119991, Россия, Москва, ул. Вавилова, 38.

этих законов позволяет глубже понять физические процессы и сэкономить существенные финансовые средства. Согласно теории подобия и размерности [1–4], такие законы устанавливаются с помощью их (размерных и безразмерных) инвариантов и обобщенных безразмерных переменных. Такие инварианты и переменные весьма полезны при дальнейшем исследовании и анализе большого числа опытных данных и позволяют свести воедино данные различных исследователей [7], а иногда – установить ранее не известные закономерности исследуемых явлений (импульсных разрядов) [8].

Несмотря на давнюю историю исследования электрических разрядов в газах, работы по установлению их законов подобия стали проводиться только с середины прошлого века [5, 6, 9–11]. Так экспериментально были установлены размерные инварианты подобия лишь для стационарных низкотемпературных неизотермических разрядов и электрического пробоя [5, 6, 9–11], а метод получения **размерных инвариантов** был предложен только в 1991 году авторами работы [12]. Вкратце суть этого метода состоит в следующем.

Разряды называются подобными, если физические величины $G(r,t)$ в сходных пространственно-временных точках, определяемых линейным преобразованием

$$x'_i = sx_i,\ t' = st, \tag{1}$$

связаны следующим линейным преобразованием:

$$G'(x'_i, t') = s^{\alpha[G]}G(x_i, t), \tag{2}$$

где $\alpha[G]$ называется *показателем подобия*, s – коэффициент сжатия/растяжения. В [12] из инвариантности кинетических уравнений Больцмана и уравнений поля (Максвелла) относительно преобразования (1) установлены **Б-подобие** и **П-подобие** разрядов.

Опыт показывает, что исследование разрядов будет более эффективным, если известны их **безразмерные инварианты.** Однако такие инварианты для импульсных сильноточных электрических разрядов (ИСЭР) в плотных газах до сих пор не определены. Тогда, естественно, возникает вопрос: каким способом это можно осуществить? Метод, предложенный в работе [12], не даёт ответа на поставленный вопрос. Цель данной работы состоит в установлении безразмерных инвариантов ИСЭР в плотных газах и в проведении исследования на основе этих инвариантов для получения новых результатов.

1. Показатели подобия физических величин разрядов. Для установления размерных и безразмерных инвариантов ИСЭР необходимо знать величины показателей подобия

$\alpha[G]$ характеристик разрядов. Их определим на основе метода, предложенного авторами работы [12]. В ней из инвариантности кинетических уравнений Больцмана и уравнений поля относительно преобразования (1) определены величины $\alpha[G]$ основных величин плазмы и поля, которые и будут использованы нами ниже. ИСЭР в газах относится к случаю **Б-подобия**, так как степень ионизации α_e плазмы высокая $(0.5 \leq \alpha_e \leq 2.0)$.

Характерные размеры. Характерными размерами таких разрядов являются начальный радиус R_{in} и радиус $R(t)$ разрядного канала, длина разрядного промежутка l_0. Для описания динамики расширения канала естественно выберём цилиндрическую систему координат (t, r, z), ось 0z которой совпадает с осью симметрии указанных разрядов. При этом один из электродов имеет координату $z_1 = 0$, а другой электрод – $z_2 = l_0$. Тогда радиусы $R(t)$ и R_{in} лежат на оси 0r, а длина l_0 – на оси 0z. Следовательно, при сжатии/растяжении координат r и z в s раз они преобразуются так же, как сами координаты: $R' = s^1 R$; $R'_{\text{in}} = s^1 R_{\text{in}}$ $l'_0 = s^1 l_0$ $(\alpha[G] = 1)$.

Характерные скорости. Такими скоростями являются скорость расширения канала dR/dt, скорости звука в плазме разрядов c_p и рабочем газе c_0. Относительно преобразования (1) эти скорости представляют собой размерные инварианты, так как $\dfrac{dR'}{dt'} = \dfrac{s^1 dR}{s^1 dt}$; $\dfrac{dR'_{\text{SW}}}{dt'} = \dfrac{s^1 dR_{\text{SW}}}{s^1 dt}$ (их показатель подобия $\alpha[G] = 0$).

Термодинамические характеристики. Из инвариантности уравнения движения (либо уравнения состояния) относительно преобразования (1) следует, что показатели подобия давления p плазмы и её плотности ρ равны $\alpha[p] = \alpha[\rho]$, т.е. величины p и ρ должны преобразовываться одинаковым образом. Однако из этих уравнений величины показателей подобия не определяются. Согласно данным [12], $\alpha[\rho] = -1$, и следовательно, $\alpha[p] = -1$. Поэтому отношение давления плазмы к её плотности $p'/\rho' = (s^{-1}p)/(s^{-1}\rho) = c_p^2/\gamma_d$ представляет собой размерный инвариант (γ_d – показатель адиабаты плазмы).

Поскольку давление газа за фронтом ударной волны (УВ), возникающей перед разрядным каналом, равно давлению плазмы в разрядном канале p, то из требования инвариантности уравнения [7]

$$p = \frac{\gamma_0 + 1}{2}\rho_0 \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0 + 1} p_0 \tag{3}$$

относительно преобразования (1) следует, что показатели подобия давления плазмы p, начального давления p_0 и начальной плотности ρ_0 рабочего газа разряда одинаковы: $\alpha[p_0] = \alpha[\rho_0] = \alpha[p] = -1$. Отсюда получим следующие размерные и безразмерные инварианты разрядов и УВ: $p_0/\rho_0 = c_0^2/\gamma_0$, p/ρ_0, p/p_0.

Внутренняя энергия единицы массы ионизованного газа. Эта величина ϵ равна сумме тепловой энергии и энергии ионизации единицы массы ионизованного газа. При изменении координаты r и времени t в s раз она не изменяется: $\epsilon' = p'/(\gamma_d - 1)\rho' = (s^{-1}p)/(\gamma_d - 1)s^{-1}\rho = s^0\epsilon$, т. е. $\alpha[\epsilon] = 0$.

Электрические и магнитные характеристики разрядов. Согласно **Б-подобию**, плотность электрического тока имеет показатель подобия $\alpha[j] = -1$. Поэтому при изменении **r** и **t** по закону (1) разрядный ток преобразуется так: $J' = j'\pi R'^2 = s^{-1}j\pi s^2R^2 = s^1J$. Отсюда получаем показатель подобия разрядного тока $\alpha[J] = 1$. Что касается скорости изменения разрядного тока $F = dJ/dt$ и падения напряжения на разрядном промежутке U_d, то они инвариантны относительно преобразования (1), так как $\alpha[F] = \alpha[U_d] = 0$: $F' = dJ'/dt' = (s^1dJ)/(s^1dt) = s^0F$ и $U_d' = E'l_0' = s^{-1}Es^1l_0 = s^0U_d$. То есть падение напряжения U_d является размерным инвариантом как стационарных электрических разрядов (тлеющего разряда, дугового разряда), так и импульсных электрических разрядов (электрического пробоя газа, искрового разряда, ИСЭР в газах) относительно преобразования (1).

Омическое сопротивление r_{0m} и индуктивность L_d разрядов. Из требования инвариантности уравнения электрической цепи ИСЭР относительно преобразования (1)

$$U_d' = J'r_{0m}' + \frac{d(L_d'J')}{dt'} = s^1Js^{\alpha[r_{0m}]}r_{0m} + \frac{d(s^{\alpha[L_d]}L_ds^1J)}{s^1dt} = s^0U_d \tag{4}$$

следует, что $1 + \alpha[r_{0m}] = 0$ и $\alpha[L_d] = 0$. Отсюда находим показатель подобия омического сопротивления разрядов $\alpha[r_{0m}] = -1$, соответственно их индуктивность L_d является размерным инвариантом. Поскольку $\alpha[U_d] = \alpha[L_d] = \alpha[Jr_{0m}] = \alpha[d(L_dJ)/dt] = 0$, то падение напряжения на омическом сопротивлении Jr_{0m} и ЭДС электромагнитной индукции $d(L_dJ)/dt$, возникающей вследствие изменения разрядного тока и расширения разрядного канала, представляют собой безразмерные инварианты разрядов, и их отношения U_d/Jr_{0m}, $U_d(t)/[d(L_dJ)/dt]$ также являются безразмерными инвариантами.

Энергетические характеристики разрядов. Рассмотрим энергетический баланс ИСЭР в газах в общем виде. Вводимая в разряд энергия $Q(t)$ к моменту времени t расходуется на повышение тепловой энергии плазмы $E_{\text{TEP}}(t)$ разрядного канала, на увеличение кинетической энергии расширяющейся плазмы $E_K(t)$, на энергию $E_R(t)$, уносимую из нагретой области канала излучением, на работу $A(t)$, совершаемую расширяющимся разрядным каналом против давления рабочего газа, энергию ионизации вовлекаемого в разряд газа $I(t)$ и на изменение магнитной энергии разряда $W_M(t)$:

$$Q(t) = E_K(t) + E_{\text{TEP}}(t) + A(t) + E_R(t) + I(t) + W_M(t). \tag{5}$$

Показатели подобия всех слагаемых этого уравнения равны $\alpha[G] = 2$, а следовательно, отношения этих величин относительно преобразования (1) являются инвариантами ИСЭР в газах. Среди них для нас интерес представляют следующие безразмерные инварианты: $d_{\mathrm{M}} = \dfrac{W_M(t)}{Q(t)}$ и $\pi_{\mathrm{ion}} = \dfrac{I(t)}{E_{\mathrm{TEP}}(t)}$, так как экспериментальное и теоретическое определение величин энергии магнитного поля разрядов $W_M(t)$ и энергии $I(t)$, затраченной на ионизацию газа, представляет большие трудности.

Тем не менее оказалось, что для случая достижения предельной температуры ИСЭР в плотном газе и без проведения эксперимента можно определить величину отношения $\pi_{\mathrm{ion}} = 3$ [8]. Это означает, что при достижении предельной температуры (в области **двукратной ионизации**) в энергетическом балансе ИСЭР энергия $I(t)$, затраченная на ионизацию вовлекаемого в разряд газа, в **3 раза** больше тепловой энергии $E_{\mathrm{TEP}}(t)$.

Для определения показателей подобия других энергетических характеристик ИСЭР в плотных газах рассмотрим их энергетический баланс в следующей форме:

$$\frac{p}{(\gamma_d - 1)T}\frac{dT}{dt} - \frac{c^2}{\gamma_d}T\frac{d\rho}{dt} + w_M = q + \frac{1}{r^v}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^v[\chi_e + \chi_R]\frac{\partial T}{\partial r}\right), \tag{6}$$

где $w_M = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{W_M(t)}{\Delta V_d}\right)$, $q = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{Q(t)}{\Delta V_d}\right)$, ΔV_d – объём разряда, χ_e и χ_R – коэффициенты электронной и лучистой теплопроводностей соответственно. Поскольку при преобразовании (1) температура T и величина c^2/γ_d остаются инвариантами, показатели подобия величин q и w_M равны $\alpha[q] = \alpha[w_M] = -2$, а операторы $\dfrac{d}{dt}$, $\dfrac{\partial}{\partial r}$ и давление p имеют показатели подобия $\alpha[q] = \alpha[w_M] = \alpha\left[\dfrac{d}{dt}\right] = \alpha\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\right] = \alpha[p] = -1$, то для инвариантности правой части уравнения (6) необходимо, чтобы показатели подобия для коэффициентов χ_e и χ_R были равны $\alpha[\chi_e] = \alpha[\chi_R] = 0$. То есть при преобразованиях (1) коэффициенты электронной χ_e и χ_R лучистой теплопроводностей являются размерными инвариантами.

2. Безразмерные инварианты уравнений непрерывности, движения и баланса энергии. Для описания начальной стадии расширения ИСЭР воспользуемся следующей системой уравнений в цилиндрической системе координат:

уравнением непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln(\rho) + \frac{\partial \upsilon}{dr} + \frac{\upsilon}{r} = 0, \tag{7}$$

уравнением движения

$$\frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{\partial p}{\rho \partial r}, \tag{8}$$

уравнением баланса энергии

$$\epsilon\rho\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{T}{\rho^{\gamma-1}}\right)=(1-d_{\mathrm{Md}})\frac{J(t)U_d(t)}{l_0\pi R^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r(\chi_e+\chi_R)\frac{\partial T}{\partial r}\right), \tag{9}$$

уравнением состояния

$$p=(\gamma_d-1)A_D\rho T, \tag{10}$$

где υ – гидродинамическая скорость частиц, $\epsilon = A_DT$ (Дж/кг); A_D – теплоемкость единицы массы плазмы. Перенос излучения в разряде носит характер лучистой теплопроводности с коэффициентом $\chi_R = \sigma_0 l_P T^3/3$ (σ_0 – постоянная Стефана–Больцмана, $l_P = bT^m/\rho^n$ – росселандов пробег фотонов, b – размерный коэффициент). Коэффициенты электронной χ_e и лучистой χ_R теплопроводностей равны:

$$\chi_e=\xi(Z)\frac{k(kT_e)^{5/2}}{\sqrt{m_e}Ze^4\ln\Lambda}=\chi_{e0}T^{5/2},\ \chi_R=\frac{16}{3}\sigma_0 l_P T^3=\chi_{R0}\frac{T^{m+3}}{\rho^n},$$

где $\ln\Lambda$ – кулоновский логарифм, e и m_e – заряд и масса электрона, $\xi(Z)$ – число, слабо зависящее от заряда иона $Z(\xi(1) = 0.95;\ \xi(2) = 1.5)$. В уравнении (9) учтен безразмерный инвариант $d_{\mathrm{M}} = W_M(t)/Q(t)$. В системе уравнений (7)–(10) число неизвестных величин больше числа уравнений, т.е. она не замкнута. Поэтому возникает необходимость определения безразмерных инвариантов, позволяющих замкнуть эту систему либо дополнить её новыми уравнениями. Используем оба названных подхода. Для этого используем показатели подобия характеристик ИСЭР, определенные нами выше.

Будем искать решение системы уравнений (7)–(10) в виде:

$$T(t,\xi)=\Pi(t)\tau(\xi),\ \rho(t,\xi)=M(t)g(\xi),\ \upsilon(t,\xi)=\dot{R}(t)u(\xi), \tag{11}$$

где $\xi = r/R(t)$; $\dot{R}(t) = \partial R(t)/\partial t$ – скорость расширения разрядного канала. После подстановки (11) в систему (7)–(10) и приведения её к безразмерному виду получим следующую систему уравнений:

$$\frac{g'(\xi)}{g(\xi)}[u(\xi)-\xi]+u'(\xi)+\frac{u(\xi)}{\xi}+\frac{\dot{M}(t)R(t)}{M(t)\dot{R}(t)}=0, \tag{12}$$

$$\left(\frac{\dot{R}(t)}{c(t)}\right)^2\gamma_d u(\xi)g(\xi)\left[\left(\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2}\right)+[u(\xi)-\xi]\frac{u'(\xi)}{u(\xi)}\right]=-\frac{\partial}{\partial\xi}[\tau(\xi)g(\xi)], \tag{13}$$

$$[g(\xi)\tau(\xi)]\left\{\frac{\dot{\Pi}(t)R(t)}{\Pi(t)\dot{R}(t)}-(\gamma_d-1)\frac{\dot{M}(t)R(t)}{M(t)\dot{R}(t)}+[u(\xi)-\xi]\left[\frac{\tau'(\xi)}{\tau(\xi)}-(\gamma_d-1)\frac{g'(\xi)}{g(\xi)}\right]\right\}+$$

$$+\left[\frac{\chi_{R0}\Pi^{m+3}(t)}{A_D M^{n+1}(t)R(t)\dot{R}(t)}\right]\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\xi\left[\left(\frac{\chi_{e0}\Pi^{5/2}(t)M^n(t)}{\chi_{R0}\Pi^{m+4}}\right)\tau^{5/2}(\xi)+\frac{\tau^{m+3}(\xi)}{g^n(\xi)}\right]\frac{\partial\tau(\xi)}{\partial\xi}\right\}=$$

$$+\frac{(1-d_{\mathrm{Md}})J(t)U(t)}{\pi l_0 A_D M(t)\Pi(t)R(t)\dot{R}(t)}, \tag{14}$$

$$p=(\gamma_d-1)A_D M(t)\Pi(t)[g(\xi)\tau(\xi)], \tag{15}$$

где штрих означает дифференцирование по относительной координате ξ, а точка – дифференцирование по времени t. Граничные условия к системе уравнений (12)–(15) при этом формулируются следующим образом: $g(0)=1$; $\tau(0)=1$; $(\partial\tau/\partial\xi)_{\xi=0}=0$; $u(0)=0$. При $\xi=1$ (на границе разрядного канала) плотность, давление и скорость должны быть непрерывны. А начальные условия имеют следующий вид:

$$\Pi(0)=T_{\mathrm{in}};\ M(0)=\rho_{\mathrm{in}};\ R(0)=R_{\mathrm{in}};\ \left(\dot{R}(t)\right)_{t=0}=V_{\mathrm{in}},$$

где T_{in}, ρ_{in}, R_{in} и V_{in} – начальные температура, плотность плазмы разрядного канала, его начальный радиус и начальная скорость расширения.

Как видно из этой системы уравнений, в ней появились безразмерные комплексы, одна часть которых зависит только от времени t, а другая – только от координаты ξ. Тогда можно ожидать возможности разделения переменных в дифференциальных уравнениях в частных производных. Действительно, уравнение (12) преобразуем следующим образом:

$$\frac{\dot{M}(t)R(t)}{M(t)\dot{R}(t)}=-\frac{g'(\xi)}{g(\xi)}[u(\xi)-\xi]-u'(\xi)-\frac{u(\xi)}{\xi}. \tag{16}$$

Левая часть этого уравнения зависит только от t , а правая часть – только от координаты ξ. Отсюда следует, что обе части уравнения (16) равны постоянной C_1:

$$\pi_1=\frac{[dM(t)/dt]R(t)}{M(t)[dR(t)/dt]}=C_1,\ \ -\frac{g'(\xi)}{g(\xi)}[u(\xi)-\xi]-u'(\xi)-\frac{u(\xi)}{\xi}=C_1,$$

где C_1 – константа разделения. Более того, показатель подобия безразмерного комплекса π_1 относительно преобразования (1) равен нулю. То есть комплекс π_1 является безразмерным **инвариантом уравнения непрерывности.** Это значит, что инвариант π_1 представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение, связывающее плотность ионизованного газа $M(t)$ и радиус $R(t)$ разрядного канала.

Однако в дифференциальных уравнениях в частных производных (13) и (14) разделения переменных не происходит, поэтому для их решения используем показатели подобия характеристик разрядов и их размерные инварианты.

Безразмерные комплексы в уравнениях (13) и (14)

$$\pi_2 = \frac{R(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{dR(t)}{dt}\right)}{\left(\frac{dR(t)}{dt}\right)^2},\ \pi_3 = \left(\frac{\dot{R}(t)}{c(t)}\right)^2,\ \pi_4 = \frac{\frac{d\Pi(t)}{dt}R(t)}{\Pi(t)\frac{dR(t)}{dt}}\ \pi_5 = \frac{\chi_{R0}\Pi^{m+3}(t)}{A_D M^{n+1}(t)R(t)\dot{R}(t)},$$

$$\pi_6 = \left(\frac{\chi_{e0}\Pi^{5/2}(t)M^n(t)}{\chi_{R0}\Pi^{m+4}}\right),\ \pi_7 = \frac{(1-d_i)J(t)U_d(t)}{\pi l_0 M(t)\Pi(t)A_D R(t)\frac{dR(t)}{dt}}$$

зависят только от времени и их показатели подобия относительно преобразования (1) равны нулю. Это означает, что безразмерные комплексы $\pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$ и π_7, согласно теории подобия и размерности [12], представляют собой безразмерные инварианты:

$$\pi_2 = C_2;\ \pi_3 = C_3;\ \pi_4 = C_4;\ \pi_5 = C_5;\ \pi_6 = C_6;\ \pi_7 = C_7, \tag{17}$$

где $C_2 - C_7$ – постоянные величины и, следовательно, они представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения, с помощью которых определим $M(t), \Pi(t)$ и $R(t)$.

Таким образом, путем установления безразмерных инвариантов π_1, π_2, π_3, π_4, π_5, π_6 и π_7 нам удалось свести дифференциальные уравнения в частных производных (12)–(14) к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Для определения значений постоянных $C_1 - C_7$ рассмотрим начальную стадию расширения разрядов ($t \le \sqrt{L_K C}$, L_K – индуктивность разрядного контура). Для этой стадии, согласно опытным данным, давление плазмы p в разрядном канале распределено **однородно**, т. е. не зависит от координаты ξ. Тогда из уравнения движения (13) получим два уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}[\tau(\xi)g(\xi)] = 0,\ R\ddot{R}/(\dot{R})^2 - [u(\xi) - \xi]\frac{u'(\xi)}{u(\xi)} = 0. \tag{18}$$

Используя граничные условия при $\xi = 0\,(\tau(0) = 1,\ g(0) = 1)$, определим величину постоянной интегрирования первого уравнения системы (18):

$$\tau(\xi)g(\xi) = 1. \tag{19}$$

Уравнение (19) означает, что пространственные распределения температуры $\tau(\xi)$ и плотности $g(\xi)$ плазмы в канале становятся взаимно связанными. Для нахождения функций $g(\xi)$ и $\tau(\xi)$ достаточно определить одну из них. Второе уравнение системы (18) преобразуем к следующему виду;

$$\pi_2 = R(t)\ddot{R}(t)/[\dot{R}(t)]^2 = u'(\xi)\left[\frac{\xi}{u(\xi)} - 1\right]. \tag{20}$$

В уравнении (20) переменные t и ξ разделяются. Отсюда следует, что обе части этого уравнения в частных производных равны постоянной C_2 (константа разделения):

$$u'(\xi)\left[\frac{\xi}{u(\xi)}-1\right]=C_2,\ R(t)\ddot{R}(t)/[\dot{R}(t)]^2=C_2. \tag{21}$$

Подставив в первое из этих уравнений граничное условие $u(1)=1$ при $\xi=1$, определим значение этой константы: $C_2=0$. При известном значении константы C_2 второе уравнение системы (21) с начальными условиями $R(0)=R_{\text{in}},\ (\dot{R}(t))_{t=0}=V_{\text{in}}$ имеет следующее решение:

$$R(t)=R_{\text{in}}+V_{\text{in}}t. \tag{22}$$

При $C_2=0$ решением первого уравнения системы (21) с граничными условиями $u(0)=0, u(1)=1$ является функция

$$u(\xi)=\xi, \tag{23}$$

определяющая пространственное распределение газодинамической скорости частиц плазмы $\upsilon(t,\xi)=\dot{R}(t)u(\xi)$ в разрядном канале. С учётом (23) из уравнения непрерывности (16) определим значение константы C_1:

$$\pi_1=\frac{\dot{M}(t)R(t)}{M(t)\dot{R}(t)}=C_1=-2. \tag{24}$$

При известном значении инварианта π_1 из уравнения (24) с начальными условиями $M(0)=\rho_{\text{in}}$, $R(0)=R_{\text{in}}$ получаем зависимость плотности плазмы $\rho(t,\xi)=M(t)g(\xi)$ разрядного канала от его радиуса $R(t)$:

$$M(t)=\rho_{\text{in}}\left(\frac{R_{\text{in}}}{R(t)}\right)^2. \tag{25}$$

Используя уравнение состояния (15), уравнение (19) и формулу (25), найдем значения безразмерного инварианта

$$\pi_4=\frac{\dot{\Pi}(t)R(t)}{\Pi(t)\dot{R}(t)}=C_4=2. \tag{26}$$

При известной зависимости $M(t)$ из уравнения состояния (19) можно определить температуру плазмы на оси разрядного канала

$$\Pi(t)=\frac{p}{(\gamma_d-1)A_DM(t)}. \tag{27}$$

Давление плазмы p в (27) определяется формулой (3).

При известных величинах $U_d(t)$, $J(t)$, l_0, $R(t)$, $M(t)$ и $\Pi(t)$ значения остальных безразмерных инвариантов π_5, π_6 и π_7 можно вычислить.

Из полученных решений (22), (25) и формулы (27) видно, что плотность $M(t)$ и температура $\Pi(t)$ зависят от радиуса канала $R(t)$. Зависимость начальной скорости V_{in} от обобщенной переменной Ξ ИСЭР в плотных газах определена нами в работе [7] и согласуется с опытными данными, полученными нами и другими исследователями. Величины V_{in}, $M(t)$ и $\Pi(t)$, а также радиальные распределения температуры $\tau(\xi)$ и плотности $g(\xi)$ в разрядном канале разрядов будут определены в следующих работах.

Считаю своим долгом выразить благодарность А. А. Рухадзе за ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. И. Седов, *Методы подобия и размерности в механике* (М., Наука, 1987).

[2] Дж. Клейн, *Подобие и приближенные методы* (М., Мир, 1968).

[3] В. М. Минаковский, *Обобщенные переменные теории переноса (основы теории, справочные таблицы)* (Киев, Вища школа, 1978).

[4] С. С. Кутателадзе, *Анализ подобия и физические модели* (Новосибирск, Наука, 1986).

[5] G. Francis, *Ionization Phenomena in Gases* (London, Butterworths Scientific Publ., 1960).

[6] S. Pfau, A. Rutcher, and K. Wojaczek, Beitrage aus der Plasma Phys. Bd. 9, 333 (1969).

[7] У. Юсупалиев, Краткие сообщения по физике ФИАН, № 9, 42 (2005).

[8] У. Юсупалиев, Краткие сообщения по физике ФИАН, **34**(9), 28 (2007).

[9] C. E. Muehe, Appl. Phys. **45**, 82 (1974).

[10] В. К. Конюхов, ЖТФ **40**, 1649 (1970).

[11] Г. А. Месяц, УФН **176**, 1069 (2006).

[12] А. А. Рухадзе, Н. Н. Соболев, В. В. Соковиков, УФН **161**, 195 (1991).

Поступила в редакцию 27 марта 2012 г.