

ДВУМЕРНОЕ ТРАНСПОРТНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ГКЛ В ТРЁХМЕРНЫХ МОДЕЛЯХ ГЕЛИОСФЕРЫ

М. С. Калинин

Предложено осесимметричное транспортное уравнение для галактических космических лучей, являющееся следствием трёхмерного по пространственным координатам уравнения, в котором трёхмерность обусловлена наличием в гелиосфере токового слоя произвольной формы. Особенность предложенного уравнения заключается в учёте источника, связанного с вариациями трёхмерной интенсивности ГКЛ. Уравнение может быть использовано для описания процессов модуляции ГКЛ в гелиосфере.

Ключевые слова: галактические космические лучи, гелиосфера, гелиосферный токовый слой, 2D и 3D транспортное уравнение, функция распределения.

Введение. В последние годы значительные усилия исследователей были направлены на разработку теоретической базы для описания вариаций интенсивности галактических космических лучей (ГКЛ) в последовательных циклах солнечной активности (СА) на основе транспортного уравнения, впервые предложенного Крымским и Паркером [1, 2]. Позднее исследования структуры гелиосферного магнитного поля (ГМП) привели к выводу о важности дрейфового механизма модуляции и позволили естественным образом объяснить различие в поведении интенсивности ГКЛ в последовательных минимумах солнечной активности, отличающихся знаком ГМП [3].

Для внутренней гелиосферы (< 30 а.е.) эффекты трёхмерности в ГКЛ для энергий выше 100 Мэв невелики. Поэтому для описания долгопериодических (среднемесячных) вариаций интенсивности ГКЛ более естественной является осесимметричная (двумерная – 2D) модель гелиосферы и решение соответствующего транспортного уравнения. Наиболее естественным подходом при формулировке осесимметричного транспортного уравнения на основе трёхмерного (3D) уравнения является усреднение по азимутальной координате в неподвижной сферической гелиоцентрической системе координат (ГСК).

В работах [5–7] нами сформулированы основные аспекты такого подхода. Получено в общем виде неоднородное уравнение для усреднённой по азимутальной переменной функции распределения (ФР), содержащее источник, зависящий от её вариации. В работе [7] апробирована итерационная схема для нахождения вариации ФР, когда в качестве первого приближения взято решение 2D однородного уравнения, а сама 3D вариация определяется с учётом только дрейфового механизма модуляции. Была выявлена противоречивость такого подхода, состоявшая в том, что предполагалась малость диффузионных потоков ГКЛ по сравнению с дрейфовыми, а расчет дает их преобладание. В данной работе мы сформулируем замкнутое осесимметричное транспортное уравнение для ГКЛ, ограничившись случаем, когда трёхмерность гелиосферы обусловлена наличием гелиосферного токового слоя (ГТС) произвольной формы, описываемого как поверхность, на которой паркеровское ГМП меняет знак. Для упрощения математических выражений в дальнейшем предполагается двухсекторность структуры ГМП.

Транспортное уравнение для ГКЛ. Транспортное уравнение может быть сформулировано для изотропной части ФР заряженных частиц ГКЛ в гелиосфере и в современном виде включает баланс четырёх основных физических механизмов её изменения: диффузию, дрейфы в неоднородном магнитном поле, конвекцию и адиабатические потери энергии:

$$\partial u / \partial t - \nabla(K \nabla u) + \vec{V} \nabla u + \vec{V}_d \nabla u - (\nabla \vec{V} / 3) p (\partial u / \partial p) = 0, \quad (1)$$

где $u(\vec{r}, p, t)$ – ФР ГКЛ, K – тензор диффузии, \vec{V} – скорость солнечного ветра, \vec{V}_d – скорость дрейфа частиц ГКЛ, p – импульс частицы. Относительно перечисленных коэффициентов уравнения (1) будем предполагать, что они в ГСК с осью OZ , направленной вдоль оси солнечного вращения, не зависят от азимутальной переменной. Исключение составляет скорость дрейфа

$$\vec{V}_d = \nabla \times [\mathfrak{S}(A\Phi(\vec{r})) K_T^{(m)} \vec{n}_B] = \mathfrak{S} \vec{V}_d^{(m)} + K_T^{(m)} (\nabla \mathfrak{S} \times \vec{n}_B), \quad (2)$$

где $\mathfrak{S}(A\Phi(\vec{r}))$ – знак ГМП, функция, в общем случае зависящая от всех трёх координат и содержащая множитель $A = \pm$ – знак радиальной составляющей ГМП в северном полушарии гелиосферы. В простейшем случае бесконечно тонкого ГТС \mathfrak{S} представляет ступенчатую функцию: $\mathfrak{S}(Ay) = 1$ при $Ay > 0$, $\mathfrak{S}(Ay) = 0$ при $y = 0$ и $\mathfrak{S}(Ay) = -1$ при $Ay < 0$, где y – координата вдоль нормального к ГТС направления. $\Phi(r, \theta, \varphi) = 0$ – уравнение поверхности ГТС (предполагается $\Phi > 0$ в северном полушарии гелиосферы и $\Phi < 0$ в южном), $\vec{V}_d^{(m)}$ – регулярная скорость дрейфа заряженных частиц в

случае, когда магнитное поле направлено от Солнца, $K_T^{(m)} = pv/(3qB)$; v, q – скорость и заряд частицы, соответственно, B – величина паркеровского ГМП. Таким образом, скорость дрейфа \vec{V}_d в рамках принятого метода описания ГТС является суммой двух составляющих: регулярной скорости дрейфа, меняющей знак при переходе ГТС, и сингулярной составляющей, определённой на ГТС в пределах секторной зоны гелиосферы и меняющей знак при инверсии ГМП.

Поскольку модель гелиосферы включает 3D поверхность ГТС произвольной формы, ФР будет зависеть от всех координат r, θ, φ . Её можно представить в виде:

$$u(r, \theta, \varphi) = U(r, \theta) + u(r, \theta, \varphi), \quad (3)$$

где $U(r, \theta) = (1/2\pi) \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} u(r, \theta, \varphi) d\varphi$, а $u(r, \theta, \varphi)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} u(r, \theta, \varphi) d\varphi = 0; \quad \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \nabla_i u(r, \theta, \varphi) d\varphi = 0. \quad (4)$$

Отметим, что в представлении (3) из измерительных данных следует $|u(r, \theta, \varphi)/U(r, \theta)| \ll 1$ везде в гелиосфере, но в данной работе это условие явно не используется, хотя принятый формальный подход физически применим в случаях, когда азимутальная асимметрия исходного 3D-уравнения невелика.

Для дальнейшего введём локальную систему координат, определённую в произвольной точке поверхности ГТС, с единичными ортами:

$$\vec{n}_1 = \vec{B}/B; \quad \vec{n}_2 = -\nabla\Phi/|\nabla\Phi|; \quad \vec{n}_3 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2. \quad (5)$$

Таким образом, \vec{n}_2 является нормалью к ГТС, направленной в сторону южного полюса гелиосферы, а \vec{n}_3 – касательным к нему вектором, нормальным к силовым линиям ГМП. Усредняя (1) по полному периоду изменения азимутальной переменной, приходим к уравнению [5–7]:

$$\partial U/\partial t - \nabla(K\nabla U) + (\vec{V} + \vec{V}_d^{(a)})\nabla U - (\nabla\vec{V}/3)p(\partial U/\partial p) = -\langle \vec{V}_d \nabla u \rangle, \quad (6)$$

где $\vec{V}_d^{(a)} = \nabla \times (FK_T^{(m)}\vec{n}_1) = F\vec{V}_d^{(m)} + K_T^{(m)}(\nabla F \times \vec{n}_1)$ – полная бездивергентная средняя скорость дрейфа, первое слагаемое справа описывает среднюю скорость регулярного дрейфа, второе – среднюю скорость дрейфа частиц ГКЛ вдоль ГТС, $F = (1/2\pi) \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} A\mathfrak{S}(\Phi(\vec{r}))d\varphi$, а ∇F связан с формой ГТС простым соотношением: $\nabla F =$

$-\sum_{k=1}^2 (\beta \vec{n}_2)_{\varphi_k}$, $\beta = 1/(\pi r \sin \theta |\vec{e}_\varphi \vec{n}_2|)$, φ_k – долгота точек пересечения пути интегрирования с ГТС. Правая часть (6) представляет среднее (со знаком минус) по полному периоду азимутальной переменной значение дивергенции дрейфового потока, обусловленного вариацией u . Условия (3), (4) в общем случае не обеспечивают выполнение неравенства $|\nabla u| < |\nabla U|$ в пределах секторной зоны, содержащей ГТС, поэтому источник в правой части (6) может быть одного порядка с величиной $\vec{V}_d^{(a)} \nabla U$.

2D транспортное уравнение. Воспользовавшись вторым из соотношений (4), правую часть уравнения (6) можно представить в виде

$$-\langle \vec{V}_d \nabla u \rangle = -(1/2\pi) \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} [\nabla \times (\mathfrak{S} K_T^{(m)} \vec{n}_1)] \nabla u \, d\varphi = -\vec{V}_d f^+ - K_T \sum_{k=1}^2 (\beta \nabla u \vec{n}_3)_{\varphi_k}, \quad (7)$$

где $f_i^+ = (1/\pi) \int_{\varphi_2}^{\varphi_1+2\pi} \nabla_i u \, d\varphi = -f_i^- = -(1/\pi) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \nabla_i u \, d\varphi$, K_T – дрейфовый коэффициент $K_T^{(m)}$, умноженный на A . Отметим, что два слагаемых в правой части (7), играющие роль источника для левой части уравнения (6), могут не удовлетворять условию бездивергентности поправки $\sigma \vec{V}_d^{(a)}$ к средней скорости дрейфа $\vec{V}_d^{(a)}$, обусловленной вариацией ФР u , так как процедура усреднения может нарушить это свойство исходной трёхмерной скорости дрейфа.

Рассмотрим уравнение для u , которое получается вычитанием из полного 3D уравнения (1) уравнения (6) (все дрейфовые члены перенесены в правую часть):

$$\partial u / \partial t - \nabla (K \nabla u) + \vec{V} \nabla u - (\nabla \vec{V} / 3) p \partial u / \partial p = \langle \vec{V}_d \nabla u \rangle - \vec{V}_d \nabla u + (\vec{V}_d^{(a)} - \vec{V}_d) \nabla U. \quad (8)$$

На самом ГТС из уравнения (8) следует условие баланса полного диффузионно-дрейфового потока [4–7], которое запишется в виде:

$$\sum_{k=1}^2 \{ [K(\nabla u^+ - \nabla u^-)] \beta \vec{n}_2 \}_{\varphi_k} = -2K_T [(\nabla F \times \vec{n}_1) \nabla U + \sum_{k=1}^2 (\beta \nabla u \vec{n}_3)_{\varphi_k}], \quad (9)$$

где знаки “+” и “–” обозначают знак ГМП. Левая часть (9) представляет дивергенцию разности диффузионных потоков, правая – дрейфового потока вдоль ГТС. Очевидно, система уравнений (6), (8), дополненная условием (9), эквивалентна исходному уравнению (1).

Исходя из определения \vec{f}^\pm (7) и равенства касательных к ГТС компонент $(\nabla_3 u)_{\varphi_i}^\pm$ нетрудно показать, что в общем случае выполняются равенства

$$\nabla \times \vec{f}^+ = \sum_{k=1}^2 (\beta \nabla u^+ \times \vec{n}_2)_{\varphi_k} = -\nabla \times \vec{f}^- = -\sum_{k=1}^2 (\beta \nabla u^- \times \vec{n}_2)_{\varphi_k}.$$

Отсюда, как следствие, получаем: $\sum_{k=1}^2 (\beta \nabla u^+ \vec{n}_3)_{\varphi_k} = \sum_{k=1}^2 (\beta \nabla u^- \vec{n}_3)_{\varphi_k} = 0$. Далее, поскольку функции f_i^+ и f_i^- связаны соотношением (4), на полном интервале $(\varphi, 2\pi + \varphi)$ азимутальной переменной в пределах секторной зоны можно определить векторную функцию \vec{f} , равную \vec{f}^- при $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ и \vec{f}^+ при $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$: $\vec{f} = \mathfrak{S}(\Phi(\vec{r})) \vec{f}^+$. Используя это определение, результат интегрирования (9) отдельно по каждому из секторов можно записать в виде уравнения:

$$\begin{aligned} \partial \tilde{u} / \partial t - \nabla(K\vec{f}) + \vec{V}\vec{f} - (\nabla\vec{V}/3)p\partial \tilde{u} / \partial p = \mathfrak{S}\{-(1 - F^2)\vec{V}_d^{(m)}\nabla U + F\vec{V}_d^{(m)}\vec{f} + \\ + K_d^{(m)}F(\nabla F \times \vec{n}_1)\nabla U\}; \tilde{u}(r, \theta, \varphi) = (\mathfrak{S}/\pi) \int_{\varphi_2}^{\varphi_1+2\pi} u d\varphi. \end{aligned} \quad (10)$$

Кроме того, вектор \vec{f} удовлетворяет условию баланса средних по секторам диффузионно-дрейфовых потоков на ГТС, аналогичному равенству (9). Отличие этого условия от условия (9) заключается в том, что оно не следует из (10), а является дополнительным к нему. Поскольку усреднённая по азимутальной переменной дивергенция потока в ГТС описывается последним слагаемым в правой части равенства (10), то баланс средних по секторам дивергенций диффузионно-дрейфовых потоков запишется в виде:

$$\sum_{k=l}^2 \{K[\vec{f}^+ / (1 + F) - \vec{f}^- / (1 - F)]\beta \vec{n}_2\}_{\varphi_k} = -2K_T F(\nabla F \times \vec{n}_1)\nabla U. \quad (11)$$

В дальнейшем для анализа равенства (11) удобно выбрать систему координат с осями $\vec{n}_1, \vec{n}_2 = \vec{e}_\theta, \vec{n}_3 = \sin \chi \vec{e}_r + \cos \chi \vec{e}_\varphi$. В этой системе координат тензор диффузии диагонален, и с учётом равенства $\vec{f}^- = -\vec{f}^+$ находим:

$$K_\perp \vec{f}^+ \nabla F = -F(1 - F^2)K_T^{(m)}(\nabla U \times \vec{n}_1)\nabla F, \quad (12)$$

K_\perp – компонента тензора диффузии, перпендикулярная направлению ГМП. Таким образом, $\vec{f}^+ = -F(1 - F^2)(K_T^{(m)} / K_\perp)(\nabla U \times \vec{n}_1)$, а искомая правая часть уравнения (1) запишется в виде:

$$-\langle \vec{V}_d \nabla u \rangle = F(1 - F^2)(K_T^{(m)} / K_\perp)\vec{V}_d^{(m)}(\nabla U \times \vec{n}_1), \quad (13)$$

т.е. при заданных коэффициентах $K_T^{(m)}, K_\perp$ она зависит от знака полярности A СЦ, содержащегося в F , и от формы поверхности ГТС, т.е. параметра F .

Анализ результатов. Полученное в результате учёта источника в правой части уравнения (6) выражение для полной эффективной скорости дрейфа $\vec{V}_d^{(a)} + \delta \vec{V}_d^{(a)}$ удовлетворяет определённым необходимым требованиям: 1) на границах секторной зоны

при $|F| = 1$ скорость регулярного дрейфа принимает “классическое” значение \vec{V}_d , 2) на магнитном экваторе при $|F| \rightarrow 0$ скорость регулярного дрейфа стремится к нулю.

Для оценки средней скорости дрейфа на ГТС при $|F| \rightarrow 1$ отметим (см. [7]), что при $\theta \rightarrow \theta_M$ со стороны секторной зоны, где θ_M – граничное значение полярного угла секторной зоны, $(\partial F/\partial\theta) \sim 1/|\theta - \theta_M|^{1/2}$. Такая расходимость скорости дрейфа в ГТС не приводит к скачку в ∇U , поскольку является более слабой, чем δ -образная расходимость.

В другом предельном случае $|F| \rightarrow 0$, т.е. на поверхности магнитного экватора (необязательно совпадающей с гелиоэкватором) при конечных значениях ширины секторной зоны средняя скорость дрейфов в ГТС, равная $K_T^{(m)}(\nabla F \times \vec{n}_1)$, также конечна, поскольку ∇F конечен при $|F| \rightarrow 0$.

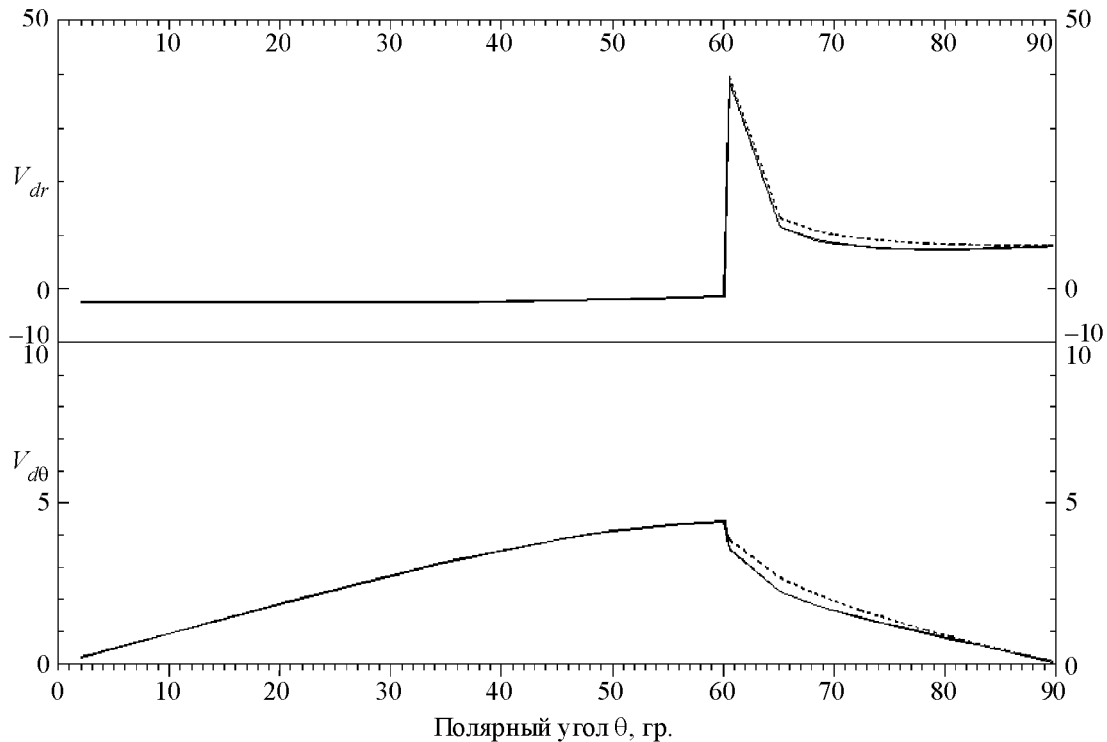


Рис. 1: Радиальная (верхняя панель) и полярная (нижняя панель) компоненты скорости дрейфа (в единицах 10^7 см/сек) как функции полярного угла. Сплошная линия – скорость дрейфа с учётом поправки, пунктирная линия – средняя скорость дрейфа без учёта поправки.

В пределе плоского ГТС его можно задать уравнением $\Phi(\vec{r}) = \theta_0 - \theta = 0$, где θ_0 – значение полярного угла, определяющего положение магнитного экватора. В этом

случае единичный вектор нормали $\vec{n}_2 = -\nabla\Phi/|\nabla\Phi| = \vec{e}_\theta$, и возможный сингулярный член в диффузионном слагаемом уравнения (6), который возникает вследствие разрывности диффузионного потока при $\theta = \theta_0$, по определению запишется в виде $K_\perp(\nabla_\theta U^+ - \nabla_\theta U^-)\delta(\theta - \theta_0)$. Соответствующий сингулярный член, связанный с дрейфами, даётся правой частью выражения (12). Поскольку плоский ГТС является предельным случаем поверхности любой формы, достаточно проанализировать поведение функции F в рамках модели “наклонного токового слоя” (см., напр., [8]). В рамках этой модели $F = (2/\pi) \arcsin(\text{ctg } \alpha \text{ ctg } \theta)$, и в предельном случае $\alpha \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow \pi/2 \pm 0$ нетрудно получить, что $F \rightarrow 1 - 2H(\theta - \pi/2)$, H – функция Хевисайда. Поэтому ∇F представляет собой δ -функцию соответствующего аргумента. Таким образом, в случае $\theta_0 = \pi/2$ в пределе плоского ГТС на нём выполняется соотношение, определяющее скачок нормальной к нему компоненты градиента:

$$\nabla_\theta U^+ - \nabla_\theta U^- = -(2K_T/K_\perp)\nabla_r U \sin \chi, \quad (14)$$

где χ – угол между радиальным направлением и направлением ГМП. Выражение (14) совпадает с аналогичным соотношением, приведённым в работе [8] как частный случай, соответствующий плоскому ГТС. Отметим, что такой же результат следует из (12), если идентифицировать $f_\theta^+ \rightarrow (\nabla_\theta U)^+$ (в нём также учтено равенство $(\nabla_\theta U)^- = -(\nabla_\theta U)^+$, отражающее симметрию северной и южной полусфер гелиосферы).

На рис. 1 представлены графики радиальной и полярной компонент полной скорости дрейфа с полученной в этой работе с поправкой (сплошная линия) и без неё (пунктирная линия) как функции полярного угла, рассчитанные в рамках модели “наклонного токового слоя” [4] при угле наклона 30° и $qA = 1$ (протоны, 250 МэВ). Видно, что эффективные значения радиальной и полярной компонент скорости дрейфа в секторной зоне с учётом правой части (6) ниже соответствующих компонент средней скорости дрейфа $\vec{V}_d^{(a)}$. Величина дрейфовых эффектов уменьшается на 20–30%.

Рис. 2 демонстрирует возможность описания измерительных данных по радиальному ходу интенсивности ГКЛ (протоны, 250 МэВ) с полученной в этой работе скоростью дрейфа, рассчитанной в рамках модели “наклонного токового слоя” при угле наклона ГТС $\alpha = 5^\circ$. Сплошная линия – расчёты при $qA = 1$, штриховая – при $qA = -1$. Квадратиками и кружками обозначены измерительные данные, отнесённые к соответствующим периодам минимумов СА [9, 10]. В расчётах были использованы диффузионные коэффициенты $\sim 1/B$, а также значение $K_T/K_\perp \approx 1$.

Выводы. 1. Получена зависимость скорости дрейфа в секторной зоне гелиосферы как функция средней характеристики формы поверхности ГТС $F(r, \theta)$. При этом величина

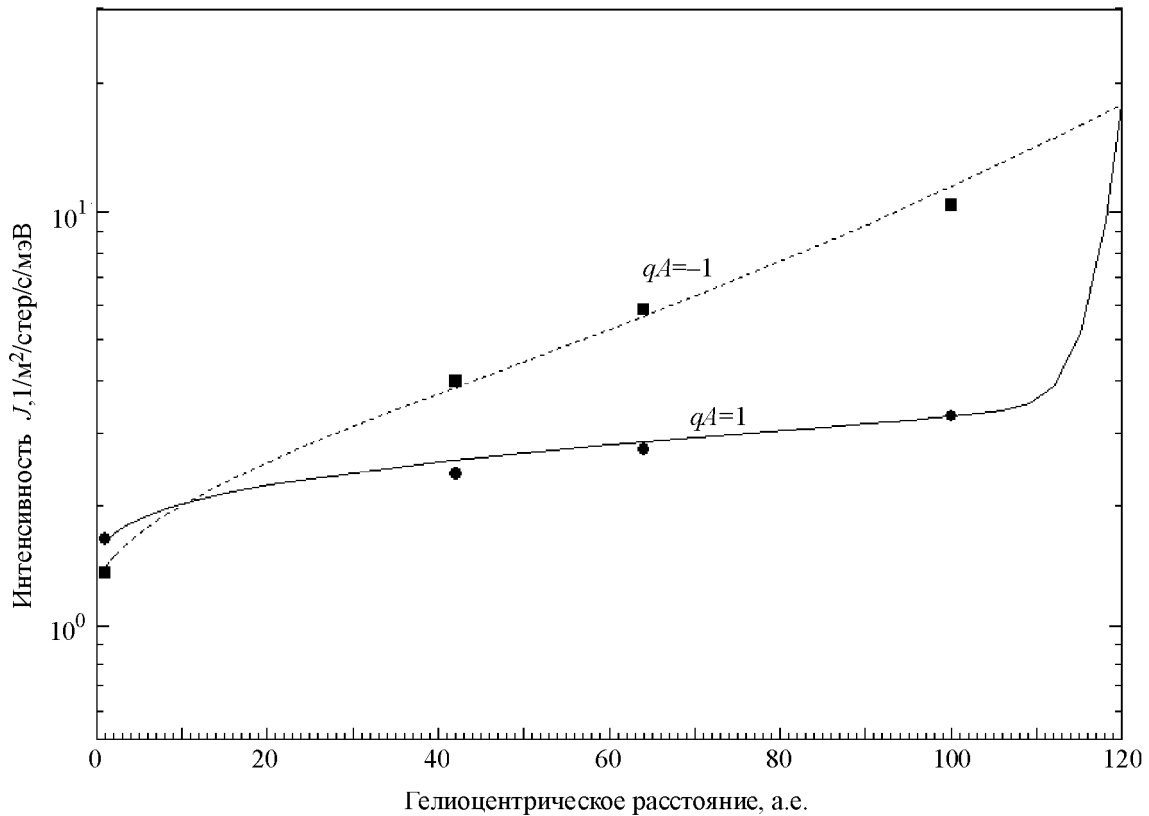


Рис. 2: Расчётная интенсивность ГКЛ (протоны, $T = 250$ МэВ) в последовательных минимумах СА. Пунктирная линия – при отрицательном знаке ГМП, сплошная – при положительном знаке. Квадраты и кружки – измерительные данные, относящиеся к соответствующим минимумах СА.

полной эффективной скорости дрейфа зависит от знака полярности ГМП, а также от формы поверхности ГТС.

2. Полученные в работе результаты дают решение задачи усреднения 3D транспортного уравнения для ГКЛ с формулировкой замкнутого 2D уравнения в простом случае, когда трёхмерность обусловлена только ГТС произвольной формы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Г. Ф. Крымский, Геомагнетизм и аэрономия **4**, 977 (1964).
- [2] E. N. Parker, Planet. Space Sci. **13**, 9 (1965).
- [3] J. R. Jokipii, E. H. Levy, and W. B. Hubbard, Astrophys. J. **213**, 861(1977).

- [4] J. R. Jokipii and B. Thomas, *Astrophys. J.* **243**, 1115 (1981).
- [5] M. S. Kalinin and M. B. Krainev, *Proc. 24th ICRC, Rome, Italy*, **4**, 688 (1995).
- [6] M. S. Kalinin and M. B. Krainev, *Adv. Space Res.* **19**(6), 933 (1997).
- [7] M. Krainev and M. Kalinin, *Proc. 31st ICRC, Lodz, Poland* (2009),
<http://icrc2009.uni.lodz.pl/proc/pdf/icrc1048.pdf>.
- [8] J. R. Jokipii and D.A. Kopriva, *Astrophys. J.* **234**, 384 (1979).
- [9] <http://voyadger.gsfc.nasa.gov/heliopause/heliopause/data.html>
- [10] F. B. Mc. Donald, in: *Cosmic Rays in the Heliosphere*, eds. Fisk L.A., Jokipii J.R., et al., (Space Science Series of ISSI, Kluwer Academic Publishers, 1998), p. 33.

Поступила в редакцию 28 июня 2011 г.