

ТЕОРИЯ БОЗЕ–ЭЙНШТЕЙНОВСКОЙ КОНДЕНСАЦИИ СВЕТА В МИКРОПОЛОСТИ

Д. Н. Собьянин

Разработана теория бозе–эйнштейновской конденсации (БЭК) света в микрополости с красителем. Учтено вырождение фотонов по поляризациям и взаимодействие между молекулами красителя и фотонами во всех модах полости. Теория выходит за рамки большого канонического приближения и позволяет определить статистические свойства фотонного газа для всех чисел молекул красителя и фотонов при всех температурах, тем самым описывая с общей точки зрения микроскопическую, мезоскопическую и макроскопическую БЭК света. Получено универсальное соотношение между степенью когерентности второго порядка для фотонного конденсата и поляризованного фотонного конденсата. Бозе–эйнштейновский конденсат фотонов может использоваться в качестве нового источника неклассического света.

Ключевые слова: бозе–эйнштейновская конденсация света, флуктуации конденсата, субпуассоновская статистика, неклассический свет.

Недавно наблюдалась бозе–эйнштейновская конденсация (БЭК) света в микрополости с красителем [1]. В этом эксперименте фотоны заключены в бисферическую оптическую микрополость, заполненную раствором красителя. В микрополости происходит постоянное поглощение и переизлучение фотонов. Поскольку свободный спектральный диапазон микрополости сравним с шириной спектра флуоресценции красителя, то доминирует излучение фотонов с некоторым фиксированным продольным квантовым числом. Вдобавок кривизна зеркал индуцирует гармонический потенциал захвата для фотонов. Таким образом, мы имеем дело с двумерным массивным фотонным газом в

гармоническом потенциале, и этот фотонный газ постоянно взаимодействует с раствором красителя.

Цель данной статьи – представить последовательную теорию БЭК света. В этой теории учитывается вырождение фотонов по поляризациям и взаимодействие всех мод полости с молекулами красителя. Большое каноническое приближение нигде не используется. Теория позволяет полностью определить статистические свойства фотонного газа без ограничений на числа фотонов и молекул красителя и, в частности, исследовать флуктуации всего фотонного газа, фотонного конденсата и поляризованного фотонного конденсата. Более того, она предсказывает необычные неклассические корреляции интенсивности, которые прежде не наблюдались в эксперименте по БЭК света.

В оптической микрополости фиксировано продольное квантовое число. Микрополость обладает дискретным эквидистантным энергетическим спектром таким, что энергия и кратность вырождения m -го уровня соответственно равны $\hbar\omega_m = \hbar\omega_0 + m\hbar\Omega$ и $g_m = 2(m + 1)$, где $\hbar\omega_0$ – энергия фотона основной моды и Ω – частота ловушки. Если продольное квантовое число q_0 , расстояние между зеркалами D_0 , радиус кривизны зеркал R и линейный показатель преломления раствора красителя n_0 известны, то $\hbar\omega_0 = m_{\text{ph}}c_0^2 + \hbar\Omega$ и $\Omega = c_0\sqrt{2/D_0R}$, где $m_{\text{ph}} = \pi\hbar q_0/c_0D_0$ – масса фотона и $c_0 = c/n_0$ – скорость света в среде. Удобно занумеровать все моды с одной и той же энергией. Тогда мы можем характеризовать каждую моду двумя квантовыми числами: номером m энергетического уровня и номером i моды. Для заданного m выполняется $0 \leq i \leq g_m - 1$.

Фотон основной моды определяется как фотон с энергией $\hbar\omega_0$, а фотонный конденсат – как множество фотонов основной моды. Из-за двукратного поляризационного вырождения основного состояния мы дополнительно определим поляризованный фотон основной моды – фотон основной моды с определённой поляризацией – и рассмотрим поляризованный фотонный конденсат – множество поляризованных фотонов основной моды. Тогда весь фотонный конденсат – это смесь двух поляризованных фотонных конденсатов, причём первый конденсат содержит фотоны моды 00, а второй – фотоны моды 01. Каждая из двух мод соответствует одной из двух поляризаций фотона, и два поляризованных конденсата обладают одинаковыми статистическими свойствами.

Пусть n_{mi} – число фотонов моды mi и $|\text{ph}\rangle$ – фоковское состояние фотонного газа, которое даётся вектором, составленным из чисел фотонов в каждой моде: $|\text{ph}\rangle = |\{n_{mi}\}\rangle$. Обозначим полное число фотонов для этого состояния как $n_{|\text{ph}\rangle}$. Энтропия фотонного газа в фоковском состоянии равна нулю, $s_{|\text{ph}\rangle}^{\text{ph}} = 0$, а полная энергия равна

$u_{|\text{ph}\rangle}^{\text{ph}} = n_{|\text{ph}\rangle} \hbar \omega_0 + u_{|\text{ph}\rangle}^{\perp}$, где $u_{|\text{ph}\rangle}^{\perp} = \hbar \Omega \varepsilon_{|\text{ph}\rangle}$ – поперечная энергия и $\varepsilon_{|\text{ph}\rangle} = \sum n_{mi} m$ – приведённая поперечная энергия.

Фотонный газ обменивается возбуждениями с молекулами красителя таким образом, что полное число n_{Σ} возбуждений (фотонов и возбуждённых молекул красителя) фиксировано. Статистические свойства фотонного газа определяются распределением вероятностей $\{\pi_{|\text{ph}\rangle}\}$, где $\pi_{|\text{ph}\rangle}$ – вероятность состояния $|\text{ph}\rangle$.

Для нахождения этого распределения будет использоваться иерархический принцип максимума энтропии, который разработан совсем недавно в контексте обобщённой суперстатистики [2]. Эта статистика описывает обобщённые суперстатистические системы, существенная черта которых – достаточное разделение временных масштабов между различными уровнями динамики системы [3]. Иерархический принцип максимума энтропии заключается в расположении уровней динамики в порядке возрастания динамического масштаба времени и последовательной максимизации энтропии на каждом уровне.

Вся система состоит из двух подсистем: подсистемы раствора красителя и подсистемы фотонного газа. Подсистема раствора красителя, в свою очередь, состоит из растворителя и n_d молекул красителя, среди которых имеется $n_d - n_{\Sigma} + n_{|\text{ph}\rangle}$ молекул в основном состоянии и $n_{\Sigma} - n_{|\text{ph}\rangle}$ возбуждённых молекул. Каждая молекула контактирует с растворителем, который играет роль термостата. Населённость электронных состояний молекул красителя быстро термализуется с характерным временем порядка 1 пс при комнатной температуре [4–6]. Поскольку типичное время жизни флуоресценции порядка 1–10 нс, то излучение фотонов происходит с термически равновесных возбуждённых состояний. Это явное разделение временных масштабов позволяет непосредственно применить иерархический принцип максимума энтропии к этой системе.

Рассмотрим подсистему всех молекул красителя. Пусть $g_0(\varepsilon_0)$ и $g_1(\varepsilon_1)$ – соответственно плотность вращательно-колебательных состояний для основного (S_0) и первого возбуждённого (S_1) синглетного электронного состояния. Отметим, что $\varepsilon_i = E - E_i$, где E_i – состояние с наименьшей энергией для S_i , $i = 0, 1$, и $g_i(\varepsilon_i) = 0$ для любого $\varepsilon_i < 0$. Максимизация энтропии на нижнем динамическом уровне, соответствующем быстрой термализации, позволяет получить энтропию $s_{|\text{ph}\rangle}^d = (n_d - n_{\Sigma} + n_{|\text{ph}\rangle}) s_0 + (n_{\Sigma} - n_{|\text{ph}\rangle}) s_1 + \ln \binom{n_d}{n_{\Sigma} - n_{|\text{ph}\rangle}}$ и среднюю энергию $u_{|\text{ph}\rangle}^d = (n_d - n_{\Sigma} + n_{|\text{ph}\rangle}) u_0 + (n_{\Sigma} - n_{|\text{ph}\rangle}) u_1$ подсистемы [2]. Здесь $s_i = \ln z_i + \beta(u_i - E_i)$ и $u_i = E_i - z_i^{-1} dz_i/d\beta$ – энтропия и средняя энергия молекулы красителя, причём $i = 0$ для молекулы в основном состоянии и $i = 1$ для возбуждённой молекулы, $z_i = \int e^{-\beta \varepsilon} g_i(\varepsilon) d\varepsilon$

– приведённая статистическая сумма и $\beta = (k_B T)^{-1}$ – обратная температура.

Теперь рассмотрим систему как целое. Для некоторого фиксированного $|\text{ph}\rangle$ энтропия и средняя энергия системы даются соответственно выражениями $S_{|\text{ph}\rangle} = s_{|\text{ph}\rangle}^{\text{d}} + s_{|\text{ph}\rangle}^{\text{ph}}$ и $U_{|\text{ph}\rangle} = u_{|\text{ph}\rangle}^{\text{d}} + u_{|\text{ph}\rangle}^{\text{ph}}$. Максимизация энтропии (ср. [2]) $S = -\sum \pi_{|\text{ph}\rangle} \ln \pi_{|\text{ph}\rangle} + \sum \pi_{|\text{ph}\rangle} S_{|\text{ph}\rangle}$ при условии нормировки $\sum \pi_{|\text{ph}\rangle} = 1$ и ограничении на среднюю энергию $\sum \pi_{|\text{ph}\rangle} U_{|\text{ph}\rangle} = U$, причём β выступает в качестве множителя Лагранжа, соответствующего последнему ограничению, даёт вероятность состояния $|\text{ph}\rangle$ в форме

$$\frac{\pi_{|\text{ph}\rangle}}{\pi_0} = \binom{n_{\text{d}}}{n_{\Sigma}}^{-1} \binom{n_{\text{d}}}{n_{\Sigma} - n_{|\text{ph}\rangle}} \left(\frac{z_0}{z_1} \right)^{n_{|\text{ph}\rangle}} \times \exp\{-\beta[n_{|\text{ph}\rangle} \hbar(\omega_0 - \omega_e) + u_{|\text{ph}\rangle}^{\perp}]\}, \quad (1)$$

где $\pi_0 \equiv \pi_{|0\rangle}$ – вероятность того, что в оптической микрополости нет фотонов, и $\hbar\omega_e = E_1 - E_0$.

Можно записать основное кинетическое уравнение, описывающее взаимодействие между фотонами и молекулами красителя, и непосредственно проверить, что распределение вероятностей $\{\pi_{|\text{ph}\rangle}\}$, полученное с помощью иерархического принципа максимума энтропии, является стационарным решением основного кинетического уравнения. Это будет показано в отдельной статье. В упрощённом случае это было показано в работе [2].

Уравнение (1) определяет все статистические характеристики фотонного газа. Ниже мы ограничимся рассмотрением флуктуаций фотонного конденсата, поляризованного фотонного конденсата и фотонного газа в целом.

Сперва рассмотрим флуктуации всего фотонного газа. Обозначим посредством $|\text{ph}^n\rangle$ состояние с n фотонами: $n_{|\text{ph}^n\rangle} = n$. Вероятность того, что фотонный газ содержит n фотонов, равна $\pi_n = \sum \pi_{|\text{ph}^n\rangle}$, и поэтому

$$\frac{\pi_n}{\pi_0} = \binom{n_{\text{d}}}{n_{\Sigma}}^{-1} \binom{n_{\text{d}}}{n_{\Sigma} - n} r^n a_n, \quad (2)$$

где $r = (z_0/z_1) \exp[-\beta \hbar(\omega_0 - \omega_e)]$, $a_n = \sum q^{\varepsilon_{|\text{ph}^n\rangle}}$ и $q = \exp(-\beta \hbar \Omega)$. Величина a_n находится из рекурсивных соотношений: $a_0 = 1$ и $a_n = n^{-1} \sum_{m=1}^n c_m a_{n-m}$, $n \geq 1$, где $c_n = 2(1 - q^n)^{-2}$. Уравнение (2) позволяет найти $\pi_0 = (\sum_{n=0}^{n_{\Sigma}} \pi_n / \pi_0)^{-1}$ и далее вычислить π_n для всех положительных $n \leq n_{\Sigma}$.

Далее рассмотрим флуктуации поляризованного фотонного конденсата. Вероятность π_m^{00} того, что поляризованный конденсат содержит m фотонов, получается сум-

мированием $\pi_{|\text{ph}\rangle}$ по всем состояниям с m фотонами моды 00:

$$\frac{\pi_m^{00}}{\pi_0} = \binom{n_d}{n_\Sigma}^{-1} \sum_{n=m}^{n_\Sigma} \binom{n_d}{n_\Sigma - n} r^n a_{n-m}^{00}, \quad (3)$$

где $a_0^{00} = 1$ и $a_n^{00} = a_n - a_{n-1}$, $n \geq 1$.

Наконец, рассмотрим флуктуации всего фотонного конденсата. Вероятность π_m^0 того, что конденсат содержит m фотонов, получается суммированием $\pi_{|\text{ph}\rangle}$ по всем состояниям с m фотонами основной моды:

$$\frac{\pi_m^0}{\pi_0} = \binom{n_d}{n_\Sigma}^{-1} (m+1) \sum_{n=m}^{n_\Sigma} \binom{n_d}{n_\Sigma - n} r^n a_{n-m}^0, \quad (4)$$

где $a_0^0 = 1$ и $a_n^0 = a_n^{00} - a_{n-1}^{00}$, $n \geq 1$.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда среднее число фотонов фиксировано, в то время как температура изменяется. В качестве примера выберем отношение приведённых статистических сумм $z_1/z_0 = 1$, приведённую расстройку $(\omega_0 - \omega_e)/\Omega = -10^3$ и число молекул красителя $n_d = 10^6$ и изучим, как основные характеристики фотонного газа изменяются с температурой для ряда средних чисел фотонов $\langle n \rangle = 1, 2, 4, 10, 10^2, 10^3$ и 10^4 .

На рис. 1(a) показана зависимость доли конденсата $\langle n_0 \rangle / \langle n \rangle$ от приведённой температуры T/T_c , где $\langle n_0 \rangle$ — среднее число фотонов основной моды и $T_c = \hbar\Omega\sqrt{3\langle n \rangle}/\pi k_B$ — критическая температура. С увеличением среднего числа фотонов доля конденсата стремится к параболической зависимости $\langle n_0 \rangle / \langle n \rangle = 1 - (T/T_c)^2$, $T \leq T_c$, и $\langle n_0 \rangle / \langle n \rangle = 0$, $T > T_c$. Таким образом, при понижении температуры фотонный газ претерпевает БЭК, и число фотонов конденсата начинает составлять макроскопическую долю полного числа фотонов.

На рис. 1(b) показана температурная зависимость доли фотонов в полном количестве возбуждений $\langle n \rangle / n_\Sigma$. Мы видим, что для рассматриваемых параметров возбуждения в оптической полости — это главным образом фотонные возбуждения.

Определим квантовую степень когерентности второго порядка (нормированную корреляционную функцию второго порядка для нулевой временной задержки) [7–9] для фотонного конденсата, $g_0^{(2)}(0) = \langle n_0(n_0 - 1) \rangle / \langle n_0 \rangle^2$, и для поляризованного фотонного конденсата, $g_{00}^{(2)}(0) = \langle n_{00}(n_{00} - 1) \rangle / \langle n_{00} \rangle^2$, где n_0 и n_{00} — флуктуирующие числа фотонов, соответствующие этим конденсатам. Из уравнений (3) и (4) вытекает универсальное соотношение

$$g_0^{(2)}(0) = \frac{3}{4} g_{00}^{(2)}(0), \quad (5)$$

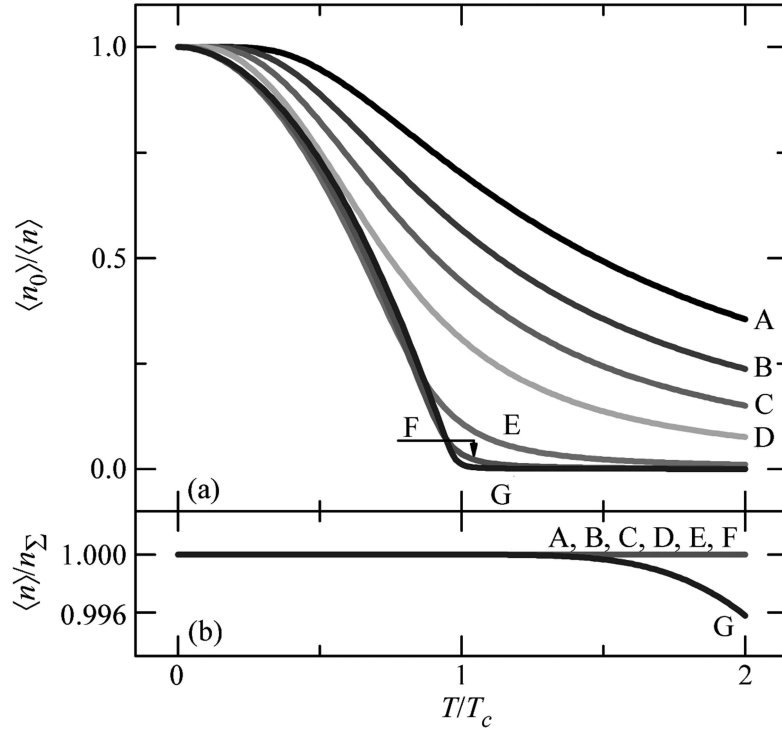


Рис. 1: (a) Доля конденсата $\langle n_0 \rangle / \langle n \rangle$ и (b) доля фотонов в полном количестве возбуждений $\langle n \rangle / n_\Sigma$ как функция приведённой температуры T/T_c . Используемые параметры: отношение приведённых статистических сумм: $z_1/z_0 = 1$; приведённая расстройка: $(\omega_0 - \omega_e)/\Omega = -10^3$; число молекул красителя: $n_d = 10^6$; среднее число фотонов: $\langle n \rangle = 1$ (кривая A), 2 (B), 4 (C), 10 (D), 10^2 (E), 10^3 (F) и 10^4 (G).

которое выполняется для всех чисел молекул красителя и фотонов при всех температурах.

На рис. 2 показана температурная зависимость функций $g_{00}^{(2)}(0)$ и $g_0^{(2)}(0)$. Каждая кривая соответствует как $g_{00}^{(2)}(0)$ (левая ось), так и $g_0^{(2)}(0)$ (правая ось), иллюстрируя универсальное соотношение (5). Для поляризованного фотонного конденсата мы наблюдаем бозе-эйнштейновскую статистику при высоких температурах, $g_{00}^{(2)}(0) = 2$, и суперпуассоновскую статистику даже при нулевой температуре, $g_{00}^{(2)}(0) = 4/3$, когда среднее число фотонов велико. Для всего фотонного конденсата мы наблюдаем на первый взгляд пуассоновскую, но фактически субпуассоновскую (см. ниже) статистику при низких температурах, $g_0^{(2)}(0) \approx 1$, но < 1 , и суперпуассоновскую статистику при высоких температурах, $g_0^{(2)}(0) = 3/2$.

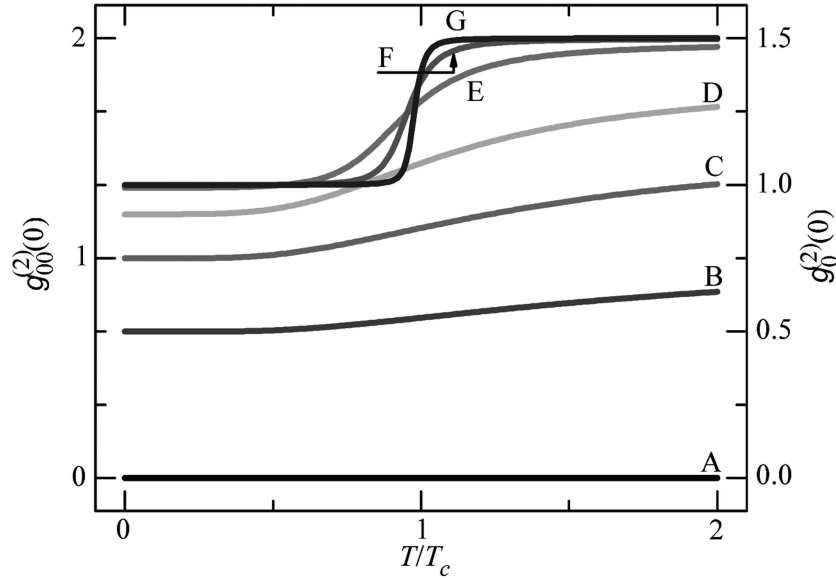


Рис. 2: Степень когерентности второго порядка для (левая ось) поляризованного, $g_{00}^{(2)}(0)$, и (правая ось) всего, $g_0^{(2)}(0)$, фотонного конденсата как функция приведённой температуры T/T_c . Используемые параметры кривых те же, что и на рис. 1. Видна универсальность соотношения (5).

Существенно, что когда среднее число фотонов мало, мы наблюдаем субпуассоновскую статистику, причём и для поляризованного, $g_{00}^{(2)}(0) < 1$, и для всего, $g_0^{(2)}(0) < 1$, фотонного конденсата, и даже при температурах выше критической температуры (см. кривые А и В на рис. 2). То же самое демонстрируется на рис. 3 и 4, на которых показан соответственно параметр Мандела [10] для поляризованного, $Q_{00} = (g_{00}^{(2)}(0) - 1)\langle n_{00} \rangle$, и для всего, $Q_0 = (g_0^{(2)}(0) - 1)\langle n_0 \rangle$, фотонного конденсата: и $Q_{00} < 0$, и $Q_0 < 0$ для кривых А и В на рис. 3(а) и 4(а). Когда среднее число фотонов возрастает, появляются состояния, для которых статистика фотонного конденсата при некоторой температуре субпуассоновская ($g_0^{(2)}(0) < 1$, $Q_0 < 0$), в то время как статистика поляризованного фотонного конденсата пуассоновская ($g_{00}^{(2)}(0) = 1$, $Q_{00} = 0$) или суперпуассоновская ($g_{00}^{(2)}(0) > 1$, $Q_{00} > 0$); кривые С и D на рис. 2, 3(а) и 4(а) при низких температурах иллюстрируют эти два случая.

На рис. 4(а) показано, что параметр Мандела Q_0 для фотонного конденсата стремится к -1 , когда температура стремится к нулю. Эта температурная зависимость Q_0 снова отражает процесс БЭК света: фотонный конденсат как целое находится в фоковском состоянии при нулевой температуре для любого среднего числа фотонов. Число фото-

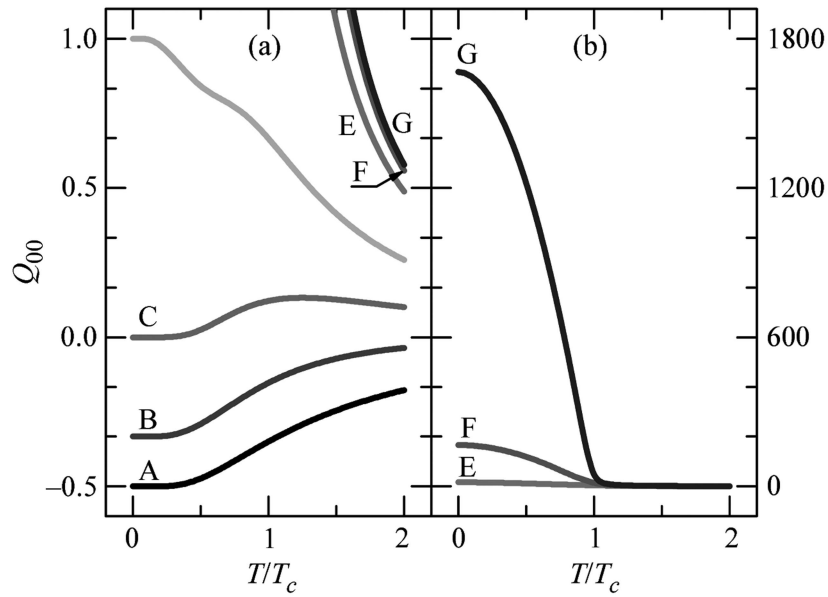


Рис. 3: Параметр Манделя Q_{00} для поляризованного фотонного конденсата как функция приведённой температуры T/T_c . Используемые параметры кривых те же, что и на рис. 1.

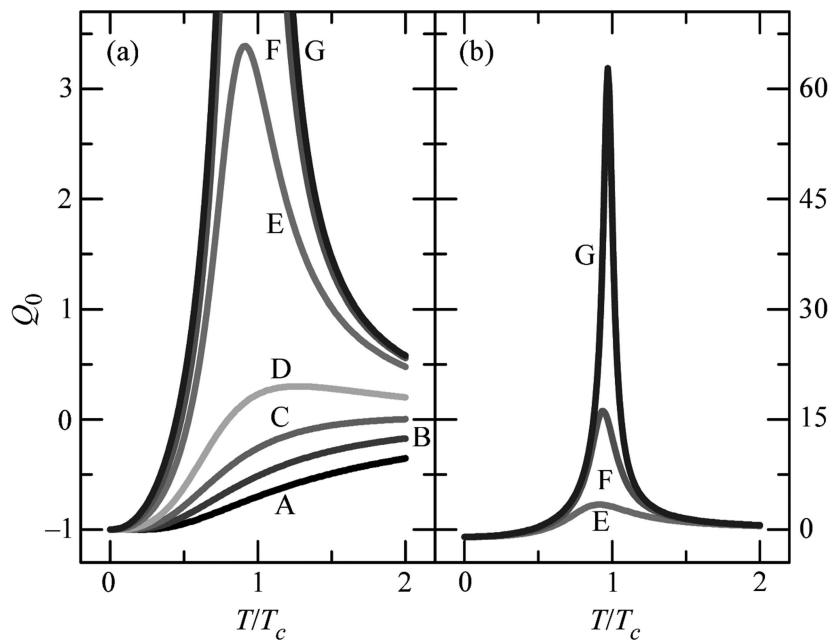


Рис. 4: Параметр Манделя Q_0 для всего фотонного конденсата как функция приведённой температуры T/T_c . Используемые параметры кривых те же, что и на рис. 1.

нов конденсата не флуктуирует и равняется полному числу фотонов, которое совпадает с полным числом возбуждений. Следовательно, фотонная статистика для всего конденсата всегда субпуассоновская при нулевой температуре, причём $g_0^{(2)}(0) = 1 - n_0^{-1} < 1$. Поляризованный фотонный конденсат, однако, флуктуирует при нулевой температуре, причём $Q_{00} \geq -1/2 > -1$ на рис. 3(а), потому что n_0 фотонов основной моды равновероятно распределяются между двумя состояниями поляризации $n_0 + 1$ способами.

Для больших чисел фотонов Q_{00} относительно мал выше критической температуры, но резко возрастает, когда температура опускается и проходит через критическое значение, тем самым показывая начало БЭК (см. рис. 3(б)). В свою очередь, Q_0 мал и при высоких, и при низких температурах, но имеет резкий пик вблизи критической температуры, в области, где меняется фотонная статистика (см. рис. 4(б)).

В заключение отметим, что в статье разработана теория бозе–эйнштейновской конденсации света в микрополости с красителем. Учтено вырождение фотонов по поляризациям и взаимодействие фотонов во всех модах полости с молекулами красителя. Теория описывает микроскопическую, мезоскопическую и макроскопическую БЭК с общей точки зрения и позволяет найти все статистические характеристики фотонного газа для всех чисел молекул красителя и фотонов при всех температурах. В частности, она позволяет исследовать флуктуации всего фотонного газа, фотонного конденсата и поляризованного фотонного конденсата. Получено универсальное соотношение между степенями когерентности второго порядка для поляризованного фотонного конденсата и всего фотонного конденсата. Теория предсказывает субпуассоновскую статистику фотонов для этих конденсатов в случае малых средних чисел фотонов даже для температур выше критической температуры. При низких температурах фотонная статистика всего конденсата субпуассоновская даже в случае больших средних чисел фотонов. Поведение степени когерентности второго порядка для поляризованного и всего фотонных конденсатов предполагает, что микрополость с красителем, в которой имеет место БЭК света, может быть источником неклассического света, и поляризованного, и неполяризованного, с субпуассоновской статистикой и антигруппировкой фотонов.

Предлагается наблюдать экспериментально предсказания теории, а именно, субпуассоновскую статистику и универсальное соотношение (5).

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] J. Klaers, J. Schmitt, F. Vewinger, and M. Weitz, *Nature* **468**, 545 (2010).

- [2] D.N. Sob'yanin, Phys. Rev. E **85**, 061120 (2012).
- [3] D.N. Sob'yanin, Phys. Rev. E **84**, 051128 (2011).
- [4] C.V. Shank, Rev. Mod. Phys. **47**, 649 (1975).
- [5] F.P. Schaefer, ed., *Dye Lasers*, 3rd ed., Topics in Applied Physics, Vol. 1 (Springer, Berlin Heidelberg, 1990).
- [6] J.R. Lakowicz, *Principles of Fluorescence Spectroscopy*, 3rd ed. (Springer, New York, 2006).
- [7] R. J. Glauber, Phys. Rev. **130**, 2529 (1963).
- [8] R. J. Glauber, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).
- [9] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*, 3rd ed. (Oxford University Press, New York, 2000).
- [10] L. Mandel, Opt. Lett. **4**, 205 (1979).

Поступила в редакцию 5 декабря 2012 г.