УДК 524.3.78:533.9.01

ЗАМЕЧАНИЯ О ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛНАХ В СРЕДЕ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ε И μ

Ю. К. Хохлов

Рассматривается вопрос о том, допускают ли основные законы электродинамики существование веществ с отрицательными ε и μ. Препятствием этому является отрицательность плотности энергии волн, W, в теории таких сред. Показано, что попытка изменить знак W только ухудшает ситуацию, поскольку приводит к конфликту знаков в уравнении непрерывности.

Ключевые слова: электромагнитные волны, отрицательные проницаемости.

За последние годы в научной литературе накопилось значительное количество работ, посвященных электродинамике гипотетической среды, характеризующейся отрицательными проницаемостями ε и μ. Подробное представление о современном состоянии данной тематики можно получить из работы [1].

В настоящих заметках заново рассматриваются некоторые, относящиеся к данной теме, вопросы, начиная с основ.

Из четырех уравнений Максвелла нам потребуются следующие два:

$$\hat{\varepsilon}\partial_t\mathbf{E} - \mathrm{rot}\mathbf{H} = 0, \quad \hat{\mu}\partial_t\mathbf{H} + \mathrm{rot}\mathbf{E} = 0. \tag{1}$$

Здесь $c = 1$, $\partial_t = \partial/\partial t$. Учет написанных уравнений в тождестве

$$\mathbf{E}\mathrm{rot}\mathbf{H} - \mathbf{H}\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}),$$

приводит к уравнению непрерывности

$$\frac{1}{8\pi}\partial_t(E\hat{\varepsilon}E + H\hat{\mu}H) = -\frac{1}{4\pi}\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}). \tag{2}$$

Электромагнитное поле вещественно. Это экспериментальный факт, который нельзя игнорировать. Из него вытекает требование вещественности $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$. Действуя на монохроматическую волну, характеризующуюся частотой ω, операторы $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\mu}$ трансформируются в численные функции $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$.

ИЯИ РАН, 117312 Россия, Москва, проспект 60-летия Октября, 7а.

Чтобы подготовиться к случаю отрицательных проницаемостей, совершим замены $\varepsilon \to \gamma\varepsilon$, $\mu \to \gamma\mu$, где $\gamma = \pm 1$. Новые ε и μ будут неизменно положительны; значение $\gamma = -1$ соответствует т.н. левой (паранормальной) среде. Кроме того, введем поля $\tilde{\mathbf{E}} = \sqrt{\varepsilon}\mathbf{E}$, $\tilde{\mathbf{H}} = \sqrt{\mu}\mathbf{H}$[1]. В итоге система (1) примет вид

$$n\partial_t\tilde{\mathbf{E}} - \gamma\mathrm{rot}\tilde{\mathbf{H}} = 0, \quad n\partial_t\tilde{\mathbf{H}} + \gamma\mathrm{rot}\tilde{\mathbf{E}} = 0, \quad n = \sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{3}$$

Введем в рассмотрение плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся в однородной изотропной среде:

$$\tilde{\mathbf{E}}(z,t) = E_0\mathbf{e}_x e^{i\varphi}, \ \tilde{\mathbf{H}}(z,t) = H_0\mathbf{e}_y e^{i\varphi}, \ \varphi = k_z z - \omega t.$$

Здесь $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ – орты правой системы координат; ω – положительная вещественная частота, задаваемая источником (генератором) волн; E_0 и H_0 – вещественные константы.

Тогда

$$\omega n E_0 - \gamma k_z H_0 = 0, \quad \omega n H_0 - \gamma k_z E_0 = 0. \tag{4}$$

Система (4) совместна при $k_z^2 = \omega^2 n^2$, следовательно $k_z = \pm\omega n$.

Случаи $\gamma = 1$ и $\gamma = -1$ будем рассматривать раздельно. В первом случае система (4) имеет вид

$$\omega n E_0 - k_z H_0 = 0, \quad \omega n H_0 - k_z E_0 = 0, \tag{5}$$

из которого непосредственно видно, что при $k_z > 0$ $E_0 = H_0$, при $k_z < 0$ $E_0 = -H_0$. (Следовательно, всегда можно положить $|E_0| = |H_0| = 1$).

Если представить величины, с которыми мы работаем, в виде списка (E_0, H_0, k_z), то соответствующие списки допустимых комбинаций знаков этих величин будут иметь вид

$$(+++), (--+), (+--), (-+-).$$

Это – правые решения (число минусов в каждом списке четно).

В случае $\gamma = -1$ система (4) имеет вид

$$\omega n E_0 + k_z H_0 = 0, \quad \omega n H_0 + k_z E_0 = 0, \tag{6}$$

из которого следует, что при $k_z > 0$ $E_0 = -H_0$, при $k_z < 0$ $E_0 = H_0$. Соответствующие списки знаков имеют вид

$$(+-+), (-++), (++-), (---).$$

[1] Эти поля назовем п р и в е д е н н ы м и. Они достаточно интересны сами по себе, но их обсуждение выходит за рамки настоящей публикации.

Это – левые решения (число минусов в каждом списке нечетно).

Теперь мы имеем все необходимое для того, чтобы рассмотреть уравнение непрерывности (2), записав его в данном частном случае как

$$\partial_t W = -\partial_z(EH)/4\pi, \tag{7}$$

где

$$W = \gamma(\varepsilon E^2 + \mu H^2)/8\pi. \tag{8}$$

Напомним, что ε и μ неизменно положительны, следовательно в левой среде, где $\gamma = -1$, плотность энергии (8) получается несомненно отрицательной. Подобный результат удивляет. Чтобы исправить положение, В. Веселаго [2] еще в 1967 г. ввел в качестве W другое выражение, отличающееся от (8) заменами

$$\gamma\varepsilon \to \bar{\varepsilon} = \partial_\omega(\gamma\varepsilon\omega)/\partial\omega, \quad \gamma\mu \to \bar{\mu} = \partial_\omega(\gamma\mu\omega)/\partial\omega.^2 \tag{9}$$

Новые проницаемости, $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\mu}$, преимущественно положительны, что вроде бы и требуется. Однако выражение (8) получается из уравнений Максвелла т о ж д е с т в е н н ы м путем. Проницаемости $\gamma\varepsilon$ и $\gamma\mu$ в (8) – это в точности те же проницаемости, что и в (3). Вследствие этого внедрение проницаемостей (9) следует начинать с уравнений Максвелла. Но тогда новые положительные проницаемости окажутся во всех уравнениях, т.е. мы попросту вернемся в правую среду. Если же последовать примеру В. Веселаго, т.е. заменить проницаемости только в уравнении непрерывности (7), то в этом уравнении возникнет конфликт знаков: левая часть изменит знак, правая – нет.

Любопытно, что в книге [3] данный вопрос решается несколько иначе: не путем замены, но путем усреднения.

Понять ход рассуждений авторов [3] весьма трудно. Значительно легче самостоятельно рассмотреть какой-либо конкретный пример. Пусть это будет случай $(+ + -)$, тогда

$$E = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sin\varphi,\ H = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\sin\varphi,\ k_z = -\omega\sqrt{\varepsilon\mu},\ W = \frac{\gamma}{4\pi}\sin^2(k_z z - \omega t). \tag{10}$$

Благодаря множителю $\gamma = -1$ выражение (10) отрицательно в с ю д у, поэтому никакие усреднения не могут сделать его положительным.

Тем не менее, уравнения Максвелла в версии (1) формально допускают совместное существование отрицательных электрической и магнитной проницаемостей (в тексте это $\gamma\varepsilon$ и $\gamma\mu$).

[2] Сравните с [3], §§ 80, 83.

Что касается отрицательной W, то можно сказать следующее. Плотность потока какой бы то ни было материальной субстанции обычно связана с ее плотностью ρ формулой $j = \rho \cdot v$, где v – скорость. Поскольку в нашем случае $\rho \equiv W < 0$, то для $j > 0$ необходимо $v < 0$. Это трудно себе представить. По-видимому, это свидетельствует о необходимости построить более детальное теоретическое описание рассматриваемых явлений.

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] В. П. Макаров, А. А. Рухадзе, А. А. Самохин, Прикладная физика, № 4, 19 (2009).

[2] В. Г. Веселаго, УФН **92**, вып. 3, 517 (1967).

[3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред* (М., Наука, 1982).

Поступила в редакцию 5 декабря 2012 г.