УДК 531.3;519.25

СТРАННЫЙ АТТРАКТОР И СТОХАСТИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

А. Р. Каримов[1], В. Ю. Макеев[2], С. А. Решетняк, В. А. Щеглов

Обсуждается связь детерминированного хаоса и стохастического резонанса. Рассматривается влияние хаотических воздействий на эволюцию известных нелинейных динамических моделей.

Большинство физических, химических и биологических систем описываются нелинейными уравнениями в частных производных. Однако основные динамические свойства нелинейных систем могут быть установлены на основе более простых моделей, которые получаются в результате упрощения исходных уравнений и наглядно отражают внутреннюю структуру реальных систем. Как правило, редуцированная модель описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, ее поведение однозначно определяется начальными условиями. При этом, однако, оказалось, что в системах с числом степеней свободы больше единицы фазовые траектории могут образовывать предельные циклы сложной геометрической структуры, названные странными аттракторами.

Впервые плодотворность такого упрощенного подхода продемонстрировал Зальцман при описании термоконвекции на основе уравнений Навье–Стокса, заменив исходную систему уравнений в частных производных на систему из пяти обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. Численное исследование этой системы показало, что две переменные асимптотически стремятся к нулю, а три испытывают нерегулярные, явно непериодические флуктуации. С этим неожиданным явлением столкнулись Грасюк и Ораевский, теоретически изучавшие процессы генерации в молекулярном квантовом генераторе [2, 3]. Дальнейшее упрощение системы Зальцмана проделано Лоренцом в [4],

[1]Институт высоких температур РАН.

[2]Институт молекулярной биологии им. В. А. Энгельгарда РАН.

где получена система из трех нелинейных дифференциальных уравнений для описания конвекции:

$$\dot{X} = \sigma(Y - X), \tag{1}$$

$$\dot{Y} = rX - Y - XZ, \tag{2}$$

$$\dot{Z} = XY - bZ, \tag{3}$$

где σ, r, b – безразмерные параметры. Следует отметить, что в работах [5, 6] установлена полная эквивалентность лазерных уравнений и уравнений Лоренца. В настоящее время система (1) – (3) является одной из базовых моделей нелинейной динамики и при определенных условиях описывает странный аттрактор (аттрактор Лоренца).

Таким образом, простые системы, например, описываемые тремя дифференциальными уравнениями, имеют нерегулярные апериодические решения, что прямо связано с проблемой турбулентности. Оказалось, что в рамках нелинейной динамики могут существовать несколько механизмов зарождения турбулентности. В работе Рюэля и Такенса [7] показано, что хаотическое поведение обусловлено странным аттрактором, возникающим после трех последовательных бифуркаций рождения цикла. Фейгейнбаум [8] предложил модель, связанную с последовательностью бифуркаций удвоения периода. Помо и Менневиль [9] выдвинули идею хаоса с перемежаемостью, предложив возможность обратных бифуркаций Хопфа.

В настоящее время большое внимание привлекает к себе явление стохастического резонанса в различных системах с пороговой активацией, находящихся под одновременным воздействием шума и когерентной, обычно периодической силы. Впервые стохастический резонанс рассматривался в работе [10] и к настоящему времени экспериментально наблюдался в системах различной физической природы. Данный эффект возникает в открытых нелинейных диссипативных системах, когда энергия шума, распределенная по широкому спектру, трансформируется в энергию на частоте сигнала. При этом амплитуда ответа системы (сигнал – шум) в зависимости от уровня шума описывается кривой с характерным максимумом. Данный эффект открывает ряд новых возможностей в различных приложениях.

Теоретически (см., например, [11, 12]) стохастический резонанс обычно моделируется уравнением Ланжевена вида

$$\dot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q} + \epsilon_0 \cos(\omega t + \varphi) + \xi(t), \tag{4}$$

где $U(q)$ – силовой потенциал; $\xi(t)$ – белый шум с коррелятором $\langle\xi(t)\xi(t')\rangle = D\delta(t-t')$, D – интенсивность шума; $\epsilon_0, \omega, \varphi$ – амплитуда, частота и фаза периодического сигнала. Как правило, конкретные теоретические вычисления ориентируются на потенциал вида $U(q) = aq^2 + bq^4$ (бистабильный симметричный потенциал; $a < 0$, $b > 0$). При этом используется стандартная техника, связанная с переходом от уравнений Ланжевена к уравнениям Фоккера–Планка [13].

Следует ожидать, что между явлениями странного аттрактора и стохастического резонанса существует связь. Например, для открытых динамических систем это устанавливается сведением нелинейной системы третьего порядка типа (1) – (3) к одному дифференциальному уравнению (4). В основе этой процедуры, в соответствии с известной теоремой Тихонова, лежит возможность разбиения фазового объема (X, Y, Z) на области быстрых и медленных движений. Первым отвечает одна из трех пар $(X, Y), (X, Z), (Y, Z)$; медленным движениям сответствует оставшаяся третья переменная – Z, Y, X. В результате исходная система (1) – (3) сводится к уравнению для медленных движений

$$\dot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q}, \tag{5}$$

здесь U имеет смысл обобщенного потенциала. При учете в правой части (5) слабого внешнего сигнала вида

$$A(t) = \epsilon_0 \cos(\omega t) + \xi(t) \tag{6}$$

уравнение (5) переходит в (4). После несложных, но громоздких выкладок для ряда базовых моделей нелинейной динамики можно получить аналитические формы обобщенных потенциалов $U(q)$.

Модель Лоренца [4]:

$$U(q) = -\frac{a}{2}q^2 + \frac{b^2}{4}q^4 \text{ и } U(q) = \frac{q^2}{4}\left[\frac{4}{3}(a+b)q - q^2 - 2ab\right]. \tag{7}$$

Модель Рикитаке [14]:

$$U(q) = -\frac{a}{2}q^2 + \frac{b^2}{4}q^4 + \frac{a}{6}q^6 \text{ и } U(q) = \frac{a}{6}q^2\left[q^4 - \frac{3}{2}aq^2 - 3\right]. \tag{8}$$

Модель Реслера [15]:

$$U(q) = q^2\left[q^2 + \frac{4}{3}q + 2a\right] \text{ и } U(q) = \frac{1}{4}(q-at)^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9} + a\right) - (q-at)^2. \tag{9}$$

Реакция Белоусова–Жаботинского [16, 17]:

$$U(q) = \frac{1}{4}q^2\left[\frac{4}{3}(1+a)q - q^2 - 2a\right]. \qquad (10)$$

"Орегонатор" [18]:

$$U(q) = q^2\left[\frac{1}{3}(1+a)q - \frac{q^2}{4} - \frac{1}{2}a\right]. \qquad (11)$$

Как видно из (7) – (11), в рассмотренных случаях реализуются потенциалы только двух типов: бистабильный (в общем случае несимметричный) и моностабильные с конечным потенциальным барьером (одна яма). В (9) для второго случая время входит как параметр. При этом двухфокусные аттракторы соответствуют бистабильным потенциалам, однофокусные – моностабильным. Отметим, что если внешний сигнал в форме (6) учесть в исходной системе (1) – (3), то приведенные потенциалы сохраняют свой вид, но при этом функционально существенно усложняются, поскольку коэффициенты зависят от $A(t)$.

Очевидно, что наиболее интересное приложение странных аттракторов и стохастического резонанса – это теория информации. До недавнего времени роль шума в процессе передачи информации считалась чисто деструктивной. Явление стохастического резонанса, проявляется в нелинейных диссипативных системах и обусловливает усиление весьма слабых сигналов за счет шума. Данная особенность может быть использована для передачи сигналов и динамического хранения информации. Подчеркнем, что речь идет об усилении сигналов, по амплитуде существенно меньших интенсивности шума. Последнее обстоятельство важно для приложений. Возможность синхронизации, контроля и управления хаосом позволяет решать задачи скрытой связи: кодирование и расшифровка информации. Особый интерес представляют задачи в условиях детерминированного хаоса [19].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Saltzman B. J. Atoms. Sci., **19**, 329 (1962).

[2] Грасюк А. З., Ораевский А. Н. Proc. IV Int. Symp. Microwave Tubes. Schewinengan, 1962, p. 446.

[3] Ораевский А. Н. Радиотехника и электроника, **4**, 718 (1964).

[4] Lorenz E. N. J. Atoms. Sci., **20**, 130 (1963).

[5] Haken H. Phys. Lett., **A 53**, 77 (1975).

[6] Ораевский А. Н. ЖЭТФ, **103**, 981 (1993).

[7] Ruelle D. and Takens F. Comm. Math. Phys., **20**, 167 (1971).

[8] Feigenbaum M. Comm. Math. Phys., **77**, 65 (1980).

[9] Pomeau Y. and Manneville P. Comm. Math. Phys., **74**, 189 (1980).

[10] Benzi G., Sutera S., and Vulpiani A. Tellus, **33**, 225 (1981).

[11] McNamara B. and Uiesenfeldt K. Phys. Rev., **A 39**, 4854 (1989).

[12] Zhou T. and Moss F. Phys. Rev., **A 41**, 4255 (1990).

[13] Kramers H. A. Physica, **7**, 284 (1940).

[14] Cook A. E. and Roberts E. H. Proc. Cambr. Phylos. Sci., **68**, 547 (1970).

[15] Rossler O. E. Phys. Lett., **A 57**, 397 (1976).

[16] Белоусов Б. Н. Сб. рефератов по радиационной медицине за 1958 г. М., Медгиз, 1959, с. 145.

[17] Жаботинский А. М., Корзухин М. Математическое моделирование кинетических химических гомогенных систем. Колебательные процессы в биологических и химических системах. Под ред. Франка Г. М., М., Наука, 1967, с. 252.

[18] Fild R. J. and Noyes R. M. J. Chem. Phys., **60**, 1877 (1974).

[19] Кадомцев Б. Б. УФН, **164**, 449 (1994).

Поступила в редакцию 23 января 2001 г.