УДК 533.6.011.72

ИНВАРИАНТЫ ПОДОБИЯ УДАРНЫХ ВОЛН. I. ЗАКОНЫ СХОЖДЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ УДАРНЫХ ВОЛН В ГАЗЕ С ПОСТОЯННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

У. Юсупалиев, Н. Н. Сысоев[1]

Используя методы подобия и размерности, установлены безразмерные инварианты подобия ударных волн, с помощью которых определены законы схождения сильных сферических и цилиндрических ударных волн в газе с постоянной плотностью.

Ключевые слова: безразмерные инварианты подобия ударных волн, сходящиеся сильные сферические и цилиндрические ударные волны в газе, показатель автомодельности, дифференциальное уравнение.

Задача о схождении сильных сферических и цилиндрических ударных волн (УВ) в газе с постоянной плотностью рассмотрена G. Guderley [1] и независимо Л. Д. Ландау и К. П. Станюковичем [2, 3]. Ими в качестве масштаба длины был принят радиус фронта УВ $R_{SW}(t) = A(-t)^{\alpha_{SW}}$, масштаба скорости – её скорость $\dot{R}_{SW}(t) = dR_{SW}(t)/dt$, а моментом $t = 0$ считался момент её кумуляции (α_{SW} – показатель автомодельности, A – размерная постоянная). Тогда при $t < 0$ волна сходится к центру сферы (оси цилиндра), а при $t > 0$ отражается от него (неё). Система уравнений задачи состояла из уравнений непрерывности, Эйлера и адиабатичности, решения которых искались в виде:

$$v = \frac{\alpha_{SW} r}{t} V(\xi),\ \rho = \rho_0 G(\xi),\ c^2 = \frac{\alpha_{SW}^2 r^2}{t^2} Z(\xi), \tag{1}$$

где $\xi = r/R_{SW}(t) = r/A(-t)^{\alpha_{SW}}$ – автомодельная переменная, v – радиальная скорость газа относительно системы координат, связанной с неподвижным газом, находящимся в объеме сферы или цилиндра с радиусом R_{SW}.

ИОФ РАН, 119991 Россия, Москва, ул. Вавилова, 38; e-mail: nesu@phys.msu.ru.

[1] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119991 Россия, Москва, Ленинские горы, 1.

При выборе решений в виде (1) и заданных граничных условиях для безразмерных функций $V(\xi), G(\xi)$ и $Z(\xi)$ в точке $\xi = 1$ уравнения системы решались численно. Именно таким способом в работах [1–3] были найдены значения величины α_{SW}, но только для некоторых значений показателя адиабаты газа γ, а именно: γ=1; 1.4; 1.67; 3 и $\gamma_0 \to \infty$ (см. табл. 1).

Т а б л и ц а 1

Значения показателя автомодельности α_{SW}
в законах схождения сферических и цилиндрических УВ в газе с постоянной плотностью, найденные авторами работ $[1-3]$ *и рассчитанные нами по формуле* (16)

Показатель адиабаты газа γ	1.0		1.4		1.67		3.0		∞	
	α_{SW}	[Лит.] формула	α_{SW}	[Лит.] формула	α_{SW}	[Лит.] формула	α_{SW}	[Лит.] формула	α_{SW}	[Лит.] формула
Сферич. УВ	1	[2]	0.717	[1–3]	0.688	[2, 3]	0.638	[2]	0.375	[2]
($\nu = 2$)	1	(16)	0.665	(16)	0.630	(16)	0.554	(16)	0.460	(16)
Цилиндр. УВ	1	[2]	0.834	[1, 2]			0.810	[2]	0.50	[2]
($\nu = 1$)	1	(16)	0.800	(16)	0.772	(16)	0.713	(16)	0.63	(16)
Плоская УВ		[2]							1.0	[2]
($\nu = 0$)	1	(16)							1.0	(16)

Первая попытка **экспериментального** определения величины α_{SW} для сходящейся сильной цилиндрической УВ была предпринята авторами работы [4]. Используя более совершенные экспериментальные методы при исследовании таких УВ, авторы работы [5] определили показатель автомодельности α_{SW}. Определению этой величины посвящена также работа [6], в которой сходящаяся цилиндрическая УВ генерировалась с помощью импульсного индукционного разряда (Θ-пинча в Ar и Xe). Было показано, что для сильных цилиндрических УВ ($M \geq 5$) значение величины α_{SW} в пределах ошибки измерений совпадает с предсказываемой авторами работ [1, 2] величиной (см. табл. 1). Однако экспериментальная проверка величины α_{SW} проводилась только для сходящейся цилиндрической УВ и только для одно- ($\gamma = 1.67$) и двухатомных газов ($\gamma = 1.4$). Что касается других значений величины γ, например, $1.4 < \gamma < 1.67$ (для газа) и $1 < \gamma < 1.4$ (для ионизованного газа, плазмы), то для них значения показателя автомодельности α_{SW} остались неизвестными. Разумеется, для их определения можно снова воспользоваться численными методами [1–3], однако предпочтительнее иметь дело с аналитическим решением, так как оно нагляднее демонстрирует закономерности исследуемого явления и может помочь установить новые, ранее неизвестные его закономерности. Данное сообщение как раз и посвящено установлению такой зависимости показателя автомодельности α_{SW} от показателя адиабаты газа γ.

Рассмотрим задачу о распространении сильных сферических и цилиндрических ударных волн (УВ), сходящихся соответственно к центру сферы или оси симметрии цилиндра, при этом не интересуясь конкретным механизмом генерации УВ.

Для описания одномерного (радиального) движения газа за фронтом УВ используем те же самые уравнения, что и наши предшественники [1–3]. Так как процесс распространения УВ является адиабатическим, то в этом случае между давлением p и плотностью ρ газа выполняются следующие соотношения [3]:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t},\ \frac{\partial\rho}{\partial r}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial r},\ c^2=\gamma\frac{p}{\rho}, \tag{2}$$

где c – скорость звука в газе, величины p и ρ связаны уравнением состояния. С учетом (2) уравнение непрерывности приведем к виду:

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial p}{\partial r}+\rho c^2\frac{\partial\upsilon}{\partial r}+\rho c^2\frac{\nu\upsilon}{r}=0, \tag{3}$$

где показатель симметрии задачи ν равен $\nu=0,1$ и 2 для плоского, цилиндрического и сферического случаев соответственно. Если разделить все члены уравнения (3) на $\rho\times c\,(\rho\cdot c\neq 0)$, то размерность полученного уравнения совпадёт с размерностью уравнения движения. Тогда, сложив его с уравнением движения (Эйлера), получим уравнение:

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial t}+\frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial t}+\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial r}+\frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial r}\right)(\upsilon+c)=\nu c\frac{\upsilon}{r}=0, \tag{4}$$

решение которого, в отличие от (1), будем искать в виде:

$$p=\rho_0\left(\dot R_{SW}(t)\right)^2\pi(\xi),\ \upsilon=\dot R_{SW}(t)u(\xi),\ \rho=\rho_0 g(\xi), \tag{5}$$

где в качестве масштаба плотности выбрана плотность газа перед фронтом УВ ρ_0. Подставив (5) в уравнение (4) и приведя его к безразмерному виду, получим:

$$\pi_{SW2}-\frac{\xi u'(\xi)}{u(\xi)}+[2\pi_{SW2}+\pi_{SW1}]\sqrt{\frac{\pi(\xi)}{\gamma_{\mathrm{eff}}g(\xi)}}\frac{1}{u(\xi)}+\frac{\xi\pi'(\xi)}{\sqrt{\gamma_{\mathrm{eff}}\pi(\xi)g(\xi)}u(\xi)}+$$
$$+\left(\frac{u'(\xi)}{u(\xi)}+\frac{\pi'(\xi)}{\sqrt{\gamma_{\mathrm{eff}}\pi(\xi)g(\xi)}u(\xi)}\right)\left(u(\xi)+\sqrt{\frac{\gamma_{\mathrm{eff}}\pi(\xi)}{g(\xi)}}\right)+\frac{\nu\sqrt{\gamma_{\mathrm{eff}}\pi(\xi)}}{\pi_{SW2}\xi u(\xi)}=0, \tag{6}$$

где $\pi_{1SW} = \dfrac{\dot{\rho}_0(t)R_{SW}(t)}{\rho_0(t)\dot{R}_{SW}(t)}$, $\pi_{2SW} = \dfrac{R_{SW}(t)\ddot{R}_{SW}(t)}{\left(\dot{R}_{SW}(t)\right)^2}$ – безразмерные комплексы, штрих означает дифференцирование по безразмерной координате ξ, а точка – по времени t. Для решения уравнения (6) применим методы теории подобия и размерности. При распространении рассматриваемых УВ во времени и в пространстве они изменяются **подобно самим себе** и, следовательно, описывающие их уравнения должны быть **инвариантными** относительно линейного преобразования координаты r и времени t:

$$r' = sr,\ t' = st, \tag{7}$$

где s – коэффициент растяжения/сжатия. Обратим внимание, что функции, входящие в состав безразмерных комплексов π_{1SW} и π_{2SW}, зависят только от времени и их показатели подобия относительно преобразования (7) равны нулю ($\alpha[\pi_{1SW}] = \alpha[\pi_{2SW}] = 0$). Тогда, согласно [7], они представляют собой **безразмерные инварианты подобия** УВ: $\pi_{1SW} = C_{1SW}$ и $\pi_{2SW} = C_{2SW}$ (где C_{1SW} и C_{2SW} – постоянные). Эти последние равенства являются обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Безразмерные инварианты π_{1SW} и π_{2SW} по структуре совпадают с инвариантами π_{1i} и π_{2i}, установленными в [8] для сильноточных электрических разрядов в плотном газе, у которых в качестве масштаба длины был принят радиус разрядного канала.

Поскольку мы рассматриваем сильные УВ, распространяющиеся в газе с постоянной плотностью ($\dot{\rho}_0(t) = 0$), то значение инварианта π_{1SW} равно нулю ($C_{1SW} = 0$). Тогда, поделив уравнение (6) на C_{2SW}, получим:

$$1 - \frac{\xi u'(\xi)}{u(\xi)C_{2SW}} + 2\sqrt{\frac{\pi(\xi)}{\gamma_{\text{eff}}g(\xi)}}\frac{1}{u(\xi)} + \frac{\xi\pi'(\xi)}{C_{2SW}\sqrt{\gamma_{\text{eff}}\pi(\xi)g(\xi)}u(\xi)} +$$
$$+\left(\frac{u'(\xi)}{u(\xi)} + \frac{\pi'(\xi)}{\sqrt{\gamma_{\text{eff}}\pi(\xi)g(\xi)}u(\xi)}\right)\frac{(u(\xi) + \sqrt{\gamma_{\text{eff}}\pi(\xi)/g(\xi)})}{C_{2SW}} + \frac{\nu}{C_{2SW}\xi}\sqrt{\frac{\gamma_{\text{eff}}\pi(\xi)}{g(\xi)}} = 0. \tag{8}$$

Граничные условия этого уравнения определяются значениями параметров газа за скачком уплотнения сильной УВ:

$$p = \frac{2}{\gamma+1}\rho_0\left(\dot{R}_{SW}(t)\right)^2,\ \rho = \rho_0\frac{\gamma+1}{\gamma-1},\ \upsilon = \frac{2}{\gamma+1}\dot{R}_{SW}(t). \tag{9}$$

Сравнения (5) и (9) позволяют сформулировать граничные условия при $\gamma = 1$ (на фронте УВ) следующим образом:

$$\pi(1) = \frac{2}{\gamma_{\text{eff}}+1},\ g(1) = \frac{\gamma_{\text{eff}}+1}{\gamma_{\text{eff}}-1},\ u(1) = \frac{2}{\gamma_{\text{eff}}+1},\ \pi'(1) = u'(1) = 0. \tag{10}$$

При установленных нами инвариантах $\pi_{1SW} = C_{1SW} = \text{const}$ и $\pi_{2SW} = C_{2SW} = \text{const}$ уравнение (6) становится обыкновенным дифференциальным уравнением, зависимым только от автомодельной переменной ξ, и его решения представляют собой пространственные распределения основных характеристик газа за фронтом УВ.

Таким образом, путем установления **безразмерных инвариантов подобия** УВ π_{1SW} и π_{2SW} нам удалось свести **дифференциальное уравнение в частных производных** (4) к трем **обыкновенным дифференциальным** уравнениям (6), $\pi_{1SW} = C_{1SW}$ и $\pi_{2SW} = C_{2SW}$, что должно существенно облегчить решение поставленной задачи. Действительно, решением дифференциального уравнения, соответствующего инварианту π_{2SW}:

$$\frac{R_{SW}(t)\ddot{R}_{SW}(t)}{\left(\dot{R}_{SW}(t)\right)^2} = C_{2SW}, \tag{11}$$

с начальными условиями $R_{SW}(0) = 0$ и $(dR_{SW}/dt)_{t=0} = 0$ является закон распространения ударных волн:

$$R_{SW}(t) = At^{\alpha_{SW}}, \tag{12}$$

где $\alpha_{SW} = 1/(1 - C_{2SW})$. За начало отсчета $t = 0$ выберем момент кумуляции рассматриваемых УВ. Это можно сделать благодаря инвариантности уравнений непрерывности и движения относительно преобразования сдвига по времени. Тогда, согласно [2, 3], при $t < 0$ сферическая (цилиндрическая) УВ сходится к центру (оси симметрии) по закону:

$$R_{CSW}(t) = A_{CSW}(-t)^{\alpha_{CSW}}, \tag{13}$$

а при $t > 0$ – отражается от него (неё) по закону:

$$R_{RSW}(t) = A_{RSW}t^{\alpha_{RSW}}, \tag{14}$$

где A_{CSW} и A_{RSW} – размерные коэффициенты для сходящихся и отраженных УВ.

Попутно заметим, что применимость формул (13) и (14) для тороидальных УВ и правильных многоугольных УВ с фронтами замкнутой поверхности показана нами в работах [9, 10].

Для определения показателя автомодельности α_{SW} достаточно найти постоянную C_{2SW}. А её найдем из уравнения (8) с граничными условиями (10) при $\xi = 1$:

$$C_{2SW} = -\frac{\nu\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}}{(\gamma+1)[1+\sqrt{2(\gamma-1)/\gamma}]}. \tag{15}$$

Итак, показатель автомодельности равен

$$\alpha_{SW} = \frac{1}{1 + \dfrac{\nu\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}}{(\gamma+1)[1+\sqrt{2(\gamma-1)/\gamma}]}}. \tag{16}$$

В таблице 1 приведены значения величины γ_{SW}, вычисленные по формуле (16) для тех же значений γ, что и в работах [1–3]. Сравнивая их, приходим к выводу, что вычисленные нами значения удовлетворительно совпадают с результатами численных расчетов работ [1–3].

Таким образом, с помощью инвариантов подобия π_{1SW} и π_{2SW} удалось получить следующие основные результаты:

1. Аналитически подтверждены законы схождения сильных цилиндрических и сферических ударных волн в газе с постоянной плотностью.

2. Определена аналитическая зависимость показателя автомодельности α_{SW} от показателя адиабаты газа γ для $1 \le \gamma \le \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Guderley, Luftfahrtforschung **19**(9), 302 (1942).

[2] К. П. Станюкович, *Неустановившиеся движения сплошной среды* (М., Наука, 1971).

[3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика* (М., Наука, 1988).

[4] R. S. Denner and L. N. Wilson, *Electrical generation of imploding shock waves.* Exploding wires, New York, 1962. Vol. 2. P. 145-157.

[5] H. Matsuo and Y. Nakamura, J. Appl. Phys. **52**(7), 4503 (1981).

[6] П. Н. Баронец, Изв. АН СССР, МЖГ, № 3, 182 (1984).

[7] А. А. Рухадзе, Н. Н. Соболев, В. В. Соковиков, УФН **161**(9), 195 (1991).

[8] У. Юсупалиев, Краткие сообщения по физике ФИАН **39**(5), 3 (2012).

[9] У. Юсупалиев, Краткие сообщения по физике ФИАН **39**(7), 3 (2012).

[10] У. Юсупалиев, Н. Н. Сысоев, Краткие сообщения по физике ФИАН **40**(8), 3 (2013).

Поступила в редакцию 9 января 2014 г.