

СОБСТВЕННЫЕ МОДЫ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО РЕЗОНАТОРА

А. М. Игнатов

Показано, что спектры плоского резонатора с постоянной длиной, совершающего периодические колебания, представляются фрактальными кривыми типа дьявольской лестницы. В случае длины резонатора, соизмеримой с периодом колебаний, собственные моды представляют собой последовательность коротких импульсов.

Ключевые слова: электромагнитные колебания, движущийся резонатор.

В настоящей заметке обсуждается следующая модельная задача. Имеется плоский резонатор с идеально отражающими стенками, расположенными при $x = \xi(t)$ и $x = \xi(t) + L$, т.е. длина резонатора L неизменна, а сам резонатор движется произвольным, вообще говоря, неравномерным образом. Что будет с электромагнитным полем в таком резонаторе? В частности, интересен случай, когда функция $\xi(t)$ периодична с некоторым периодом T , $\xi(t + T) = \xi(t)$. Подобные задачи обсуждаются довольно давно (см. [1, 2] и цитированную там литературу), но основное внимание уделялось случаю, когда одна из стенок резонатора неподвижна, а вторая осциллирует и, кроме того, исследовалась временная эволюция электромагнитных или скалярных полей. Здесь же обсуждается вопрос о собственных колебаниях резонатора, движущегося как целое.

Выберем поляризацию так, чтобы были отличны от нуля компоненты электрического и магнитного полей $E_y(x, t)$ и $B_z(x, t)$. Тогда общее решение уравнений Максвелла имеет вид суперпозиции произвольных пакетов, бегущих в противоположных направлениях

$$\begin{aligned} E_y(x, t) &= F'(t - x) + G'(t + x), \\ B_z(x, t) &= -F'(t - x) + G'(t + x). \end{aligned} \quad (1)$$

Скорость света полагается равной единице, а поля выражаются через производные произвольных функций $F(t)$ и $G(t)$. Решение задачи полностью определяется гранич-

ными условиями, в качестве которых нужно взять условие отсутствия электрического поля на стенке в её собственной системе отсчета

$$E_y(\xi(t), t) + \xi'(t) B_z(\xi(t), t) = E_y(\xi(t) + L, t) + \xi'(t) B_z(\xi(t) + L, t) = 0. \quad (2)$$

Строго говоря, задача имеет релятивистский характер, и, поскольку соотношения (1, 2) записаны в лабораторной системе отсчета, следовало бы в граничных условиях (2) учесть зависимость длины резонатора L от времени. Тем не менее, здесь мы пренебрежем этим обстоятельством в первую очередь потому, что учет лоренцева сокращения не приведет, по-видимому, к качественному изменению полученных ниже решений. Можно найти и много других оправданий для модельного условия $L = const$. Резонатор также считается абсолютно жестким, и все возможные деформации, вызванные неравномерным движением, игнорируются. В какой степени эти упрощения могут быть реализованы на практике — вопрос отдельный.

Удобно считать функции $F(t)$ и $G(t)$ комплексными, имея в виду, что при вычислении полей (1) нужно взять их действительные части.

Подставим общее решение (1) в граничные условия (2) и проинтегрируем их по времени. В результате получим два соотношения для функций $F(t)$ и $G(t)$

$$F(a(t)) + G(b(t)) = 0, \quad (3)$$

$$F(a(t) - L) + G(b(t) + L) = 0, \quad (4)$$

где $a(t) = t - \xi(t)$ и $b(t) = t + \xi(t)$. В дальнейшем предполагается, что резонатор движется с досветовой скоростью (вопрос о сверхсветовых зеркалах требует отдельного рассмотрения), поэтому $|\xi'(t)| < 1$, и функции $a(t)$ и $b(t)$ обратимы ($a'(t) > 0$, $b'(t) > 0$). Обозначим обратные функции как $a^{(-1)}(t)$ и $b^{(-1)}(t)$ и запишем решение уравнение (3) в виде

$$F(t) = K(a^{(-1)}(t)), \quad G(t) = -K(b^{(-1)}(t)), \quad (5)$$

где $K(t)$ — новая неизвестная функция, удовлетворяющая уравнению, следующему из (4), $K(a^{(-1)}(a(t) - L)) = K(b^{(-1)}(b(t) + L))$. Последнее соотношение можно переписать в виде

$$K(s(t)) = K(t), \quad (6)$$

где функция $s(t)$ определяется исключением переменных $t_{1,2}$ из системы уравнений (см. рис. 1)

$$\begin{aligned} a(t_1) &= t + L, \\ b(t_2) &= b(t_1) + L, \\ s &= a(t_2). \end{aligned} \tag{7}$$

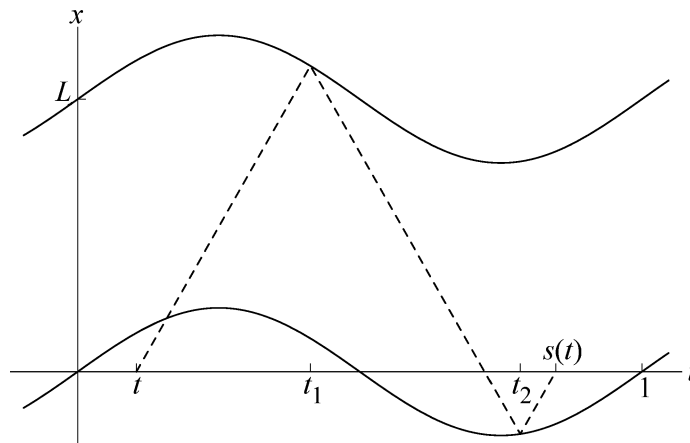


Рис. 1: Построение функции $s(t)$. Сплошные линии – зависимости $\xi(t)$ и $\xi(t) + L$, штриховые линии – характеристики $x = \pm t$.

Из соотношений (7) и рис. 1 видно, что зависимость $s(t)$ также монотонна и обратима. Зная $s(t)$, можно легко построить общее решение уравнения (6), которое выражается через некоторую произвольную функцию (см., напр. [3]). Мы не будем здесь исследовать решение (6) для произвольной зависимости $\xi(t)$, а сосредоточимся на периодическом движении резонатора. Допустим, что функция $\xi(t)$ периодична, тогда выбором масштаба времени всегда можно добиться того, чтобы период был равен единице $\xi(t + 1) = \xi(t)$. В качестве важного параметра введем максимальную скорость стенок резонатора $\varepsilon = \max |\xi'(t)|$, причем, поскольку рассматриваются только досветовые скорости стенок, $0 \leq \varepsilon < 1$. Для всех численных расчетов и графиков в дальнейшем используется зависимость

$$\xi(t) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \sin(2\pi t), \tag{8}$$

при этом общие соотношения работают и при произвольной периодической функции $\xi(t)$.

Из соотношений (7) в силу периодичности $\xi(t)$ вытекает очевидное свойство

$$s(t+1, \varepsilon, L) = s(t, \varepsilon, L) + 1, \quad (9)$$

где в качестве аргументов функции s добавлены амплитуда колебаний и длина резонатора L , являющаяся вторым параметром задачи. Функции, обладающие свойством (9), называются отображениями окружности, и их общая теория хорошо развита (напр. [4]). Наряду с (9) из (7) следует, что

$$s(t, 0, L) = t + 2L, \quad (10)$$

$$s(t, \varepsilon, L+1) = s(t, \varepsilon, L) + 2, \quad (11)$$

$$s(t, \varepsilon, 0) = t. \quad (12)$$

Из последних двух соотношений видно, в частности, что, если длина резонатора в точности кратна периоду колебаний (этот случай в дальнейшем называется основным резонансом), то

$$s(t, \varepsilon, L) = t + 2L, \quad L = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Характерный пример графика функции $s(t, \varepsilon, L)$, построенный для гармонических осцилляций резонатора (8), показан на рис. 2.

Решение (6) строится следующим образом. Во-первых, введем спектральный параметр ω (показатель Флоке или квазиэнергию) так, чтобы $K(t+1) = \exp(i\omega)K(t)$. Это дополнительное условие существенно уменьшает произвол в выборе функции $K(t)$, и параметр ω задает спектральную классификацию задачи. Будем теперь искать функцию $K(t)$ в виде $K(t) = \exp(2\pi im\varphi(t))$, где $m = \pm 1, \pm 2, \dots$, и потребуем, чтобы фаза $\varphi(t)$ удовлетворяла системе уравнений

$$\varphi(s(t, \varepsilon, L)) = \varphi(t) + 1, \quad (14)$$

$$\varphi(t+1) = \varphi(t) + \nu, \quad (15)$$

где $\omega = 2\pi m\nu$. Задача заключается в поиске значений спектрального параметра ν , при которых существует решение (14), (15), и соответствующих функций $\varphi(t)$. Если решение найдено, то мы сразу же получаем целую серию квазипериодических решений (6) при $m = 1, 2, \dots$

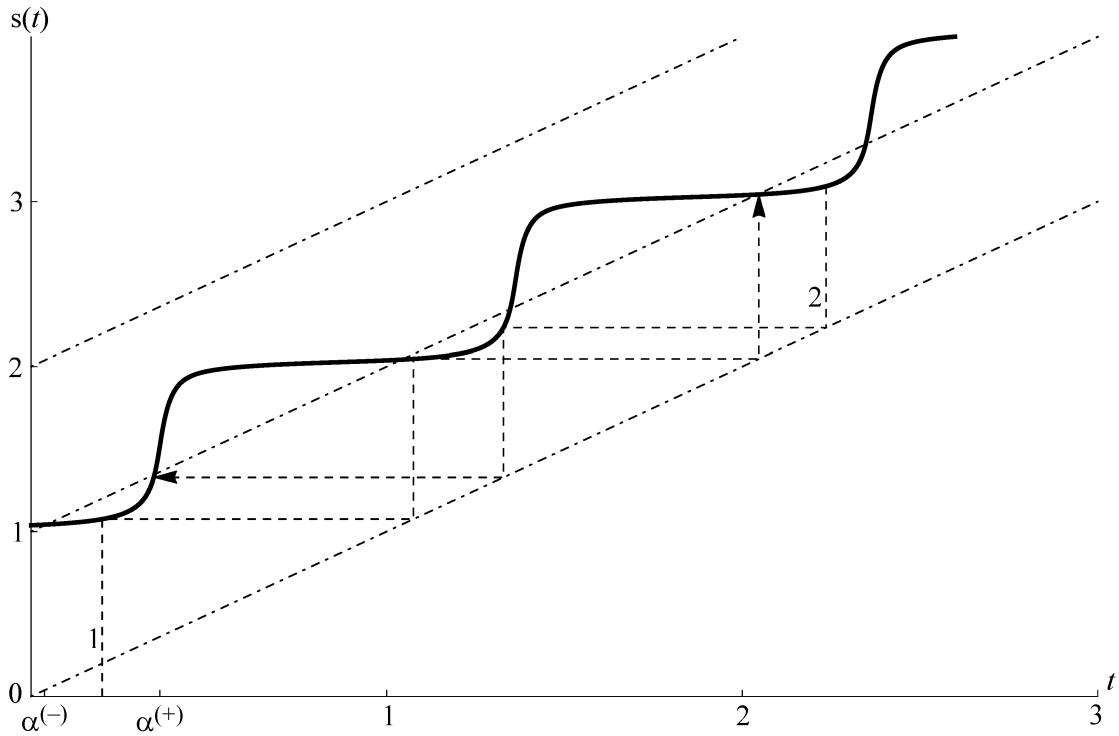


Рис. 2: Функция $s(t)$ при $\varepsilon = 0.6$, $L = 0.61$. Пунктирные ломаные линии – прямые (1) и обратные (2) итерации $s(t)$. $\alpha^{(\pm)}$ – корни уравнения $s(t) = t + 1$.

Посмотрим, как эта схема работает в случае неподвижного резонатора ($\varepsilon = 0$). В этом случае функция $s(t)$ задается выражением (10), простейшим решением (14), (15) будет $\varphi(t) = \nu t$, и решение существует, если $\nu = 1/(2L)$. Используя (1) и (5), отсюда легко получить знакомое выражение для электрического поля в резонаторе $E_z(x, t) \propto \sin(m\pi t/L) \sin(m\pi x/L)$.

Поскольку формулы (10) и (13) совпадают, точно такое же решение можно выписать и для основного резонанса: $\varphi(t) = \nu t$, $\nu = 1/(2L)$, $L = 1, 2, \dots$. Однако функции $a(t)$ и $b(t)$ теперь не сводятся к простой линейной зависимости, им обратные необходимо искать численно, и затем, используя (5, 1), вычислять поля собственной моды основного резонанса. Пример такого построения показан для различных моментов времени на рис. 3.

Рассмотрим теперь общий случай, когда длина резонатора не кратна периоду колебаний и функция $s(t)$ не совпадает с линейной. Для этого нам понадобятся некоторые сведения из теории отображений окружности, которые здесь формулируются без каких-либо доказательств [4]. Основную роль в общей теории играет изучение после-

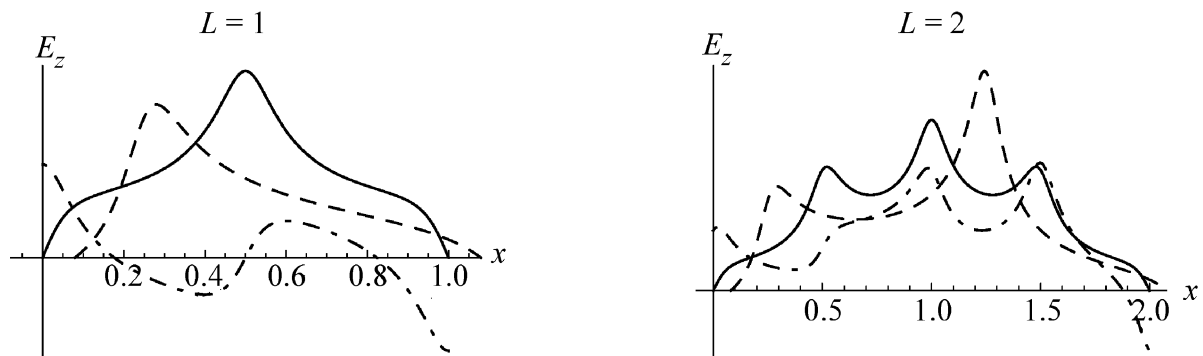


Рис. 3: Распределение электрического поля для двух основных резонансов в различные моменты времени при $\varepsilon = 0.5$, $m = 1$. Сплошные линии – $t = 0$, пунктирные – $t = 0.25$, штрихпунктирные – $t = 0.5$.

довательности итераций отображений окружности. Возьмем произвольную точку t_0 и вычислим последовательность $t_1 = s(t_0)$, $t_2 = s(t_1), \dots$. Обозначим n -ю итерацию как $t_n = s^{(n)}(t_0)$. Поскольку функция $s(t)$ обратима, можно определить обратные итерации $s^{(-n)}(t_0)$. Поведение последовательности точек t_n характеризуется числом вращения, которое определяется как $W = \lim_{n \rightarrow \infty} (s^{(n)}(t_0) - t_0)/n$. Число вращения зависит от вида функции $s(t)$, то есть в данном случае от дополнительных параметров ε и L , но не зависит от точки t_0 . Важное для дальнейших построений утверждение заключается в следующем. Если число вращения рационально $W = P/Q$, где P и Q — несоизмеримые целые числа, то дробные части точек последовательности $\{t_n\}$ при $n \rightarrow \infty$ периодически принимают Q значений $\alpha_0, \dots, \alpha_{Q-1}$ ($0 \leq \alpha_i < 1$), называемых Q -циклом. Точнее говоря, таких точек может быть больше, но длина цикла кратна Q . Если же число вращения иррационально, то последовательность $\{t_n\}$ асимптотически плотно заполняет единичный отрезок. Все это легко понять, если представить себе обмотку тора, а отображение окружности рассматривать как результат пересечения обмотки с окружностью малого радиуса.

Предположим, что в некоторой области параметров ε , L уравнение

$$s(t, \varepsilon, L) = t + P, \quad P = 1, 2, \dots \tag{16}$$

имеет решения. Если функция $\xi(t)$ меняется не слишком экзотическим образом, то таких решений на единичном отрезке должно быть два, как показано на рис. 2 для $P = 1$. Обозначим корни (16) как $\alpha^{(\pm)}$, причем $s'(\alpha^{(+)}) > s'(\alpha^{(-)})$. Из рисунка видно, что, если взять произвольное число $0 \leq t_0 < 1$, $t_0 \neq \alpha^{(+)}$, то дробная часть итерации

функции $s(t)$ (ломаная 1 на рис. 2) стремится к $\{s^{(n)}(t_0)\} \rightarrow \alpha^{(-)}$. Легко понять, что в этом случае число вращения $W(\varepsilon, L) = P$. Аналогичным образом обратные итерации сходятся к $\{s^{(-n)}(t_0)\} \rightarrow \alpha^{(+)}$ (ломаная 2 на рис. 2) для любых $t_0 \neq \alpha^{(-)}$. Подставим теперь корни (16) в уравнения (14), (15)

$$\varphi(s(\alpha^{(\pm)})) = \varphi(\alpha^{(\pm)}) + 1 = \varphi(\alpha^{(\pm)} + P) = \varphi(\alpha^{(\pm)}) + P\nu,$$

то есть уравнения (14, 15) совместны, если $\nu = 1/P = 1/W(\varepsilon, L)$.

С другой стороны, из (14) видно, что $\{\varphi(t_0)\} = \{\varphi(s^{(n)}(t_0))\} \rightarrow \{\varphi(\alpha^{(-)})\}$ при $n \rightarrow \infty$ и $t_0 \neq \alpha^{(+)}$, то есть дробная часть фазы — кусочно-постоянная функция с разрывом в точке $\alpha^{(+)}$. Тогда из (15) следует, что величина разрыва должна равняться $1/P$. Рассматривая аналогичным образом обратные итерации, легко получить второе такое же решение, но с разрывом в точке $\alpha^{(-)}$. Таким образом, если уравнение (16) имеет решение, то решением системы (14), (15) будут две функции, которые условно можно записать в виде

$$\varphi(t) = \frac{1}{P} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta(t - \alpha^{(\pm)} - n), \tag{17}$$

где $\theta(t)$ — ступенька Хевисайда.

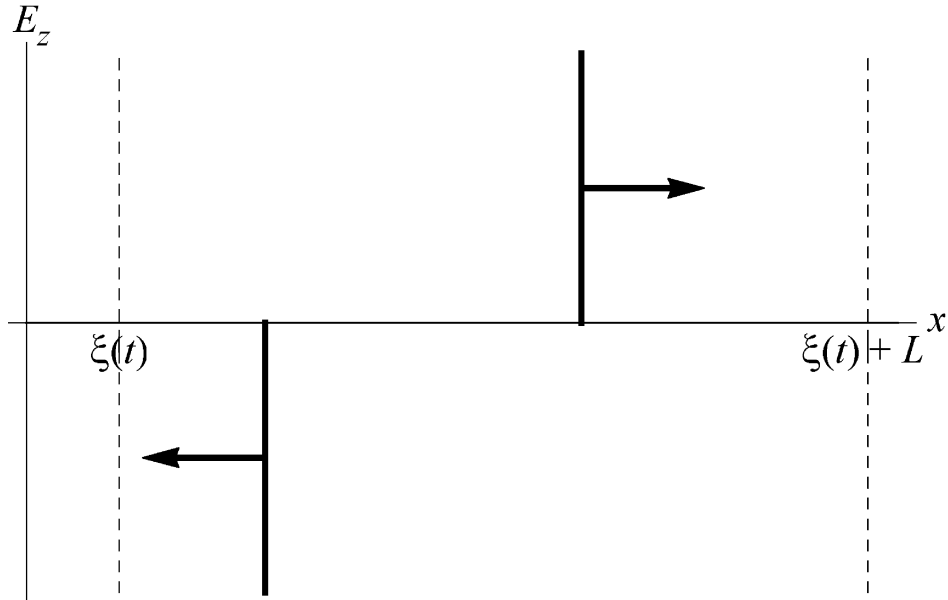


Рис. 4: Собственные моды резонатора при $Q = 1$, $P = 1$, $\varepsilon = 0.5$, $L = 0.61$.

В соответствии с (5) фаза функций $F(t)$ и $G(t)$ также является кусочно-постоянной функцией с разрывами в точках $a(\alpha^{(\pm)} \pm 1, \pm 2 \dots, b(\alpha^{(\pm)} \pm 1, \pm 2 \dots$. Наконец, электромагнитное поле построенной таким образом собственной моды описывается суперпозицией δ -функций разной полярности, бегущих в разных направлениях и переходящих друг в друга при отражении от стенок резонатора, как показано на рис. 4. Число этих импульсов определяется числом точек разрыва фаз, попадающих в каждый момент времени в интервал $\xi(t) < x < \xi(t) + L$.

Необходимо теперь выяснить, при каких условиях существуют решения (16). Это определяется явным видом функции $\xi(t)$. Из определения функции $s(t)$ (7) легко получить, что для гармонических осцилляций резонатора (8) корни (16) существуют, если

$$L = \frac{P}{2}, \quad P = 2, 4, \dots \quad (18)$$

$$\frac{P}{2} - \frac{\varepsilon}{\pi} \leq L \leq \frac{P}{2} + \frac{\varepsilon}{\pi}, \quad P = 1, 3, 5 \dots \quad (19)$$

Случай четных P является вырожденным, и выше был назван основным резонансом. Очевидно, что это решение структурно неустойчиво: при небольших изменениях длины L гладкие решения, показанные на рис. 3, разрушаются. Решения же в виде отдельных импульсов при нечетных P наоборот являются грубыми и существуют в определенном интервале изменения длины L (19). Обозначим этот интервал как $\Delta_{1/P}(\varepsilon)$. Существенно, что при $L \in \Delta_{1/P}(\varepsilon)$ число вращения $W(\varepsilon, L)$ и показатель Флоке ν от длины не зависят.

Если длина резонатора лежит вне интервала $\Delta_{1/P}(\varepsilon)$, решений (16) не существует, и необходимо рассматривать следующие итерации $s(t)$. Исследование в этом случае сводится к анализу уравнения

$$s^{(Q)}(t, \varepsilon, L) = t + P, \quad Q = 1, 2 \dots, \quad P = 1, 2 \dots, \quad (20)$$

причем достаточно рассмотреть несоизмеримые числа Q и P . Итерация $s^{(Q)}$ по-прежнему является отображением окружности, но число осцилляций на единичном интервале увеличивается. В определенном интервале изменения длины $L \in \Delta_{Q/P}(\varepsilon)$ уравнение (20) имеет на единичном интервале по меньшей мере $2Q$ корней. Обозначим их как $\alpha_i^{(\pm)}$ ($i = 0, \dots, Q - 1$). Точно так же, как и в случае $Q = 1$, можно убедиться, что число вращения $W(\varepsilon, L) = P/Q$, а показатель Флоке $\nu = Q/P$. Решения системы (14), (15) также имеют вид кусочно-постоянных функций вида (17), но число точек разрыва равно или кратно Q (пример показан на рис. 5). Наконец, электромагнитное поле

собственных мод резонатора также представляет собой последовательность импульсов, бегущих в разных направлениях и отражающихся от стенок резонатора. Замечу, что можно было бы сразу искать решение уравнений Максвелла в виде цепочки δ -образных импульсов с неизвестными координатами. Задача поиска этих координат сводится к уравнению (20).

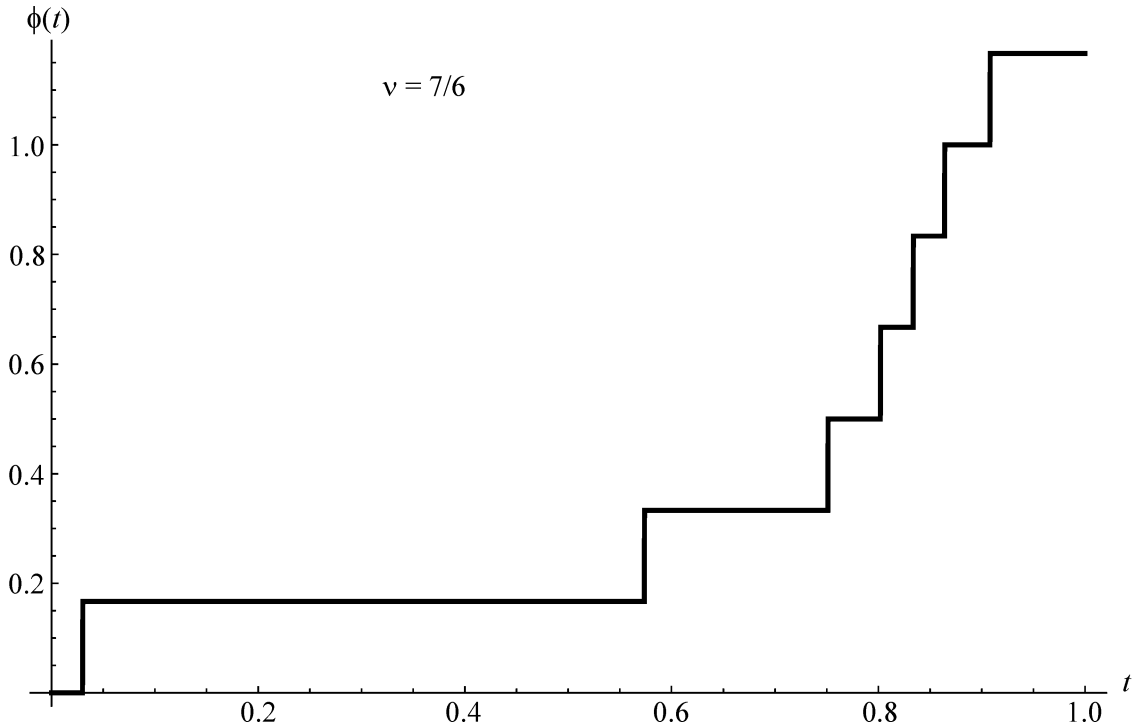


Рис. 5: Пример решения (14), (15) при $Q/P = 7/6$.

Любое иррациональное число можно аппроксимировать рациональными числами, поэтому при иррациональных числах вращения показатель Флоке по-прежнему равен $\nu = 1/W(\varepsilon, L)$. Фаза же $\varphi(t)$ при постоянном показателе Флоке стремится к непрерывной функции при $Q, P \rightarrow \infty$, $Q/P = \nu$ — на зависимости типа показанной на рис. 5 появляется все больше скачков с уменьшающейся величиной.

Теперь необходимо найти ограничения на параметры ε и L , при которых существуют решения (20), то есть интервалы $\Delta_{Q/P}(\varepsilon)$. В силу (11) это достаточно сделать при $0 < L < 1$. В отличие от случая $Q = 1$ ((18), (19)) аналитически найти нужные интервалы не удастся. Численные расчеты удобно проводить следующим образом. Сначала решается уравнение (20) относительно L и вводится функция $L = \lambda_{Q/P}(t, \varepsilon)$. Эта функция рассчитывается продлением последовательности соотношений (7) Q раз и до-

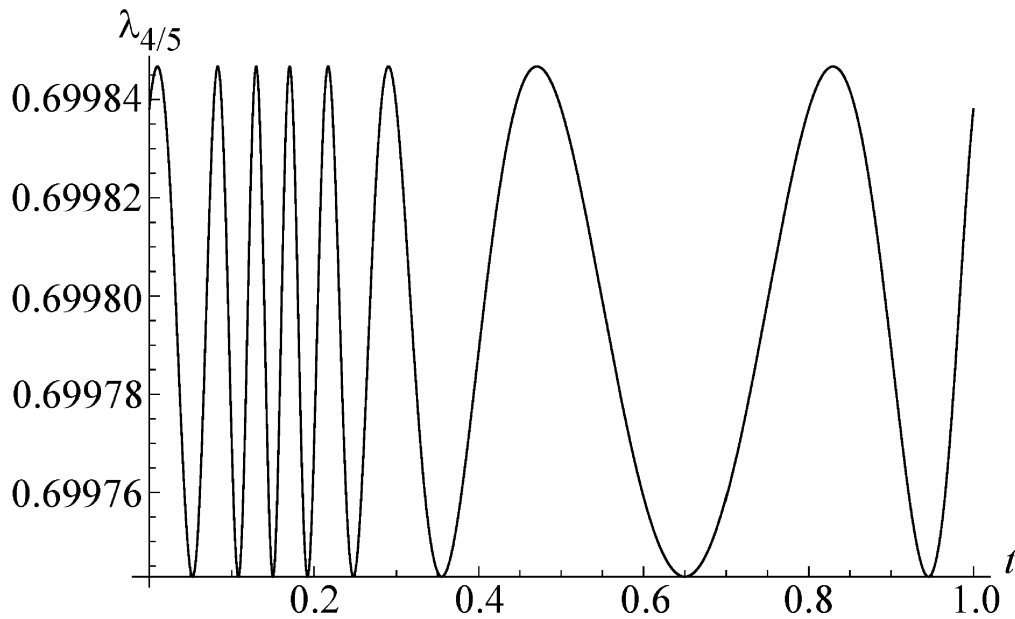


Рис. 6: Пример функции $\lambda_{Q/P}(t, \varepsilon)$, $Q/P = 4/5$, $\varepsilon = 0.5$.

бавлением условия $s^{(Q)} = t + P$. Функция $\lambda_{Q/P}(t, \varepsilon)$ периодична по t с периодом 1, её область значений совпадает с интервалом $\Delta_{Q/P}(\varepsilon)$, зная эту функцию, легко найти все элементы цикла $\alpha_i^{(\pm)}$ при заданной длине L (рис. 6).

Рассчитав таким образом интервалы $\Delta_{Q/P}(\varepsilon)$ для некоторого числа несократимых дробей Q/P , можно построить зависимость спектрального параметра ν от длины резонатора. Пример показан на рис. 7. Эта зависимость представляет собой монотонную непрерывную функцию, которая постоянна в некотором интервале, если её значение равно рациональному числу. Подобные фрактальные кривые обычно называют дьявольской лестницей, и в физике они встречаются довольно часто. Ширину каждой ступеньки (то есть длину интервала $\Delta_{Q/P}(\varepsilon)$) можно оценить как ε^Q , центры ступенек лежат примерно на кривой $\nu = 1/(2L)$. У ступенек с $\nu = 1/(2n + 1)$ ($n = 1, 2, \dots$) ширина максимальна, ступеньки с $\nu = 1/(2n)$ стягиваются в точку. Собственные моды, соответствующие рациональным значениям ν , представляют собой набор δ -образных импульсов (за исключением $\nu = 1/(2n)$, см. рис. 3), если же число ν иррационально, то собственные моды описываются гладкими непрерывными функциями. Однако вычислить гладкие собственные моды в некотором смысле невозможно, поскольку все вычисления проводятся с конечной разрядностью, то есть с рациональными числами.

Дьявольская лестница характеризуется полнотой $\kappa(\varepsilon)$, которую в данном случае можно определить как суммарную длину всех ступенек, лежащих в интервале $0 \leq L <$

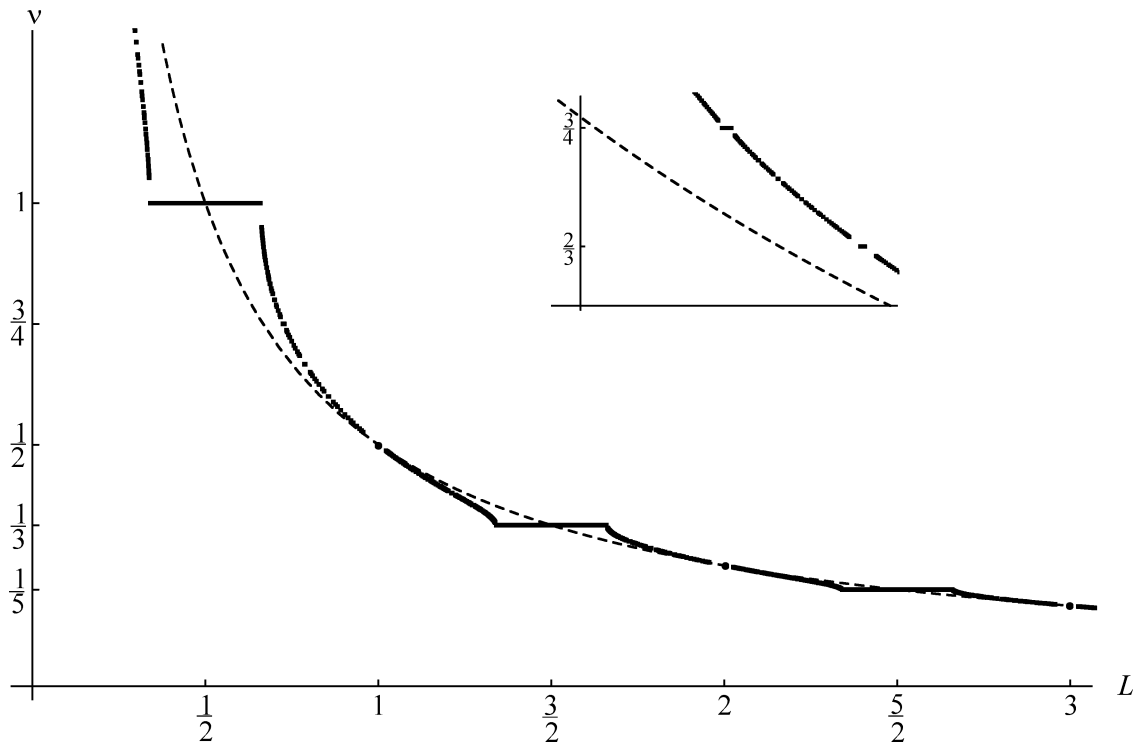


Рис. 7: Зависимость ν от L , построенная для всех дробей с $Q, P \leq 50$, $\varepsilon = 0.5$. Пунктирной линией показана зависимость $\nu = 1/(2L)$ для неподвижного резонатора. На вставке изображена область в окрестности резонанса $3/4$.

1. Зависимость $\kappa(\varepsilon)$ представляет собой монотонно растущую функцию, причем $\kappa(0) = 0$. Для параметров, при которых построен рис. 7, $\kappa \approx 0.354$. Поскольку описанная выше схема вычислений плохо работает при $\varepsilon \rightarrow 1$, вопрос о полноте дьявольской лестницы в этом случае требует дополнительного исследования.

В заключение отмечу, что в данной работе длина резонатора предполагалась постоянной. Отказ от этого ограничения приводит к периодической зависимости $L(t)$, в результате функцию $s(t)$ нужно модифицировать, но она по-прежнему остается отображением окружности. Поскольку здесь использовались грубые свойства отображений окружности, можно полагать, что учет зависимости длины от времени качественным образом не повлияет на описанную выше картину.

Все вычисления в настоящей работе проведены с помощью пакета Wolfram Mathematica 9.0.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] R. de la Llave and N. P. Petrov, Phys. Rev. E **59**, 6637 (1999).
- [2] P. Węgrzyn, J. Phys. B **40**, 2621 (2007).
- [3] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Проблемы гидродинамики и их математические модели* (М., Наука, 1977).
- [4] В. И. Арнольд, *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений* (М., Наука, 1978).

Поступила в редакцию 27 декабря 2013 г.