

УДК 530.1

АНОМАЛЬНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ ПЕРЕДАЧИ ОТНОШЕНИЯ СИГНАЛ–ШУМ ПРИ СТОХАСТИЧЕСКОМ РЕЗОНАНСЕ

С. А. Решетняк¹, Г. Н. Третьяков¹, В. А. Щеглов

Для стохастического резонанса проанализирован коэффициент передачи, показывающий во сколько раз отношение сигнал–шум на выходе бистабильной системы превышает аналогичное отношение на ее входе. С помощью численного эксперимента определены параметры системы и сигнала, при которых коэффициент передачи превышает единицу.

В последнее время для решения проблемы выделения слабого сигнала при наличии шума широко исследуется явление стохастического резонанса (СР), которое было предсказано в [1] и экспериментально реализовано в бистабильных системах самого различного рода (см., например, обзорную работу [2]). В первую очередь, это связано с необычным поведением отношения сигнал–шум (S/N) в зависимости от интенсивности шума. Кривая S/N , изображенная на рис. 1, имеет локальный максимум, который объясняется перекачкой энергии из шума в сигнал. Однако более важной характеристикой является коэффициент передачи, показывающий во сколько раз S/N на выходе бистабильной системы превышает отношение S/N на ее входе. При наличии локального максимума на кривой S/N коэффициент передачи, найденный в [3] и изображенный на рис. 2, всегда меньше единицы. Цель данной работы заключается в пересмотре основных положений явления СР и определении параметров бистабильной системы, при которых коэффициент передачи превышает единицу.

¹Московский институт радиозлектроники и автоматики.

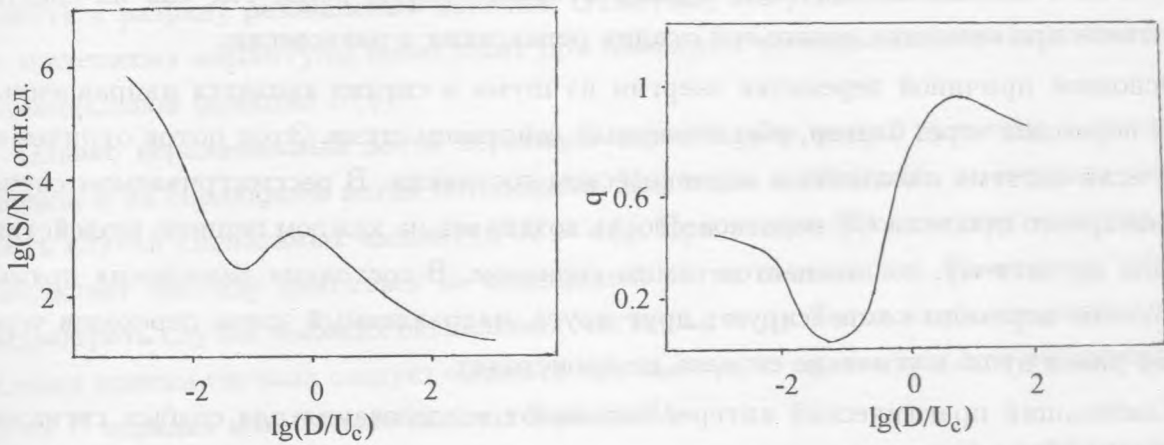


Рис. 1. Характерная для СР зависимость отношения S/N от нормированной интенсивности шума D (получена в [6] при $a = 1500 \text{ с}^{-1}$, $b = 5 \cdot 10^{-9} \text{ р}^{-2} \text{ с}^{-1}$, $A = 0.3 \text{ рс}^{-1}$, $f_0 = 40 \text{ Гц}$).

Рис. 2. Коэффициент передачи, соответствующий кривой S/N на рис. 1.

Объясняющие СР теоретические работы базируются на следующем уравнении для физической величины η , например координаты броуновской частицы:

$$\frac{d\eta}{dt} + U'(\eta) = A \cos(\omega_0 t) + \xi(t),$$

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle = 2D\delta(\tau). \tag{1}$$

Здесь $U(\eta)$ – бистабильный потенциал, имеющий два устойчивых положения равновесия с потенциальным барьером между ними, $A \cos(\omega_0 t)$ и $\xi(t)$ – сигнал и шум с интенсивностью D на входе бистабильной системы.

Уравнение (1) можно рассматривать как уравнение передемпфированного движения броуновской частицы в потенциальном поле $U(\eta)$. Теория броуновского движения используется во многих областях физики, поэтому явление СР имеет большую сферу приложений [2]. Наиболее правильный анализ СР осуществляется на основе вполне эквивалентного (1) кинетического уравнения типа Фоккера–Планка. Данное уравнение имеет определенный спектр собственных частот μ_1, μ_2, \dots , занумерованных в порядке возрастания по величине. Первые собственные частоты имеют простой физический смысл. Частота μ_1 определяет среднее число переходов за единицу времени через потенциальный барьер при воздействии на систему шума. Частота μ_2 совпадает с обратным значением времени падения частицы с вершины барьера на дно потенциальной ямы.

Остальные собственные значения играют второстепенную роль, так как их следует учитывать при описании начальной стадии релаксации к равновесию.

Основной причиной перекачки энергии из шума в сигнал является направленный поток переходов через барьер, обусловленный действием шума. Этот поток отличен от нуля, если система находится в неравновесном состоянии. В рассматриваемом случае стационарного процесса СР неравновесность возникает на каждом периоде воздействия сигнала на систему, т.е. создается самим сигналом. В состоянии равновесия прямые и обратные переходы компенсируют друг друга, направленный поток переходов через барьер равен нулю и усиление сигнала не происходит.

Наибольший практический интерес вызывают исследования для слабых сигналов, амплитуды A которых меньше или порядка характерного значения силы $U'(\eta)$. Для наиболее употребимого бистабильного потенциала вида

$$U(\eta) = -\frac{a}{2}\eta^2 + \frac{b}{4}\eta^4, \quad (2)$$

сила $U'(\eta)$ имеет характерное значение $a\eta_0$, где $\eta_0 = \sqrt{a/b}$.

При $A \ll a\eta_0$ нетрудно получить аналитическое решение кинетического уравнения в рамках нестационарной теории возмущений по малой амплитуде сигнала A . Решения, применимые для произвольных частот ω_0 , получены в работах [3, 4]. Из них следует, что амплитуда выходного сигнала существенно превышает амплитуду входного сигнала в отсутствие шума для частот в интервале $0 < \omega_0 \lesssim \mu_1$, т.е. имеет место широкополосное по частоте усиление сигнала. Поэтому получившее в литературе название "стохастический резонанс" для данного эффекта является условным.

Теоретические исследования [2] указывают также на то, что наблюдаемый экспериментально максимум на кривой S/N возможен лишь для небольших сигнальных амплитуд $A < a\eta_0$. При этом действующая на частицу периодическая внешняя сила меньше возвращающей силы $a\eta_0$ и не приводит к переходам через потенциальный барьер. Чем меньше A , тем меньше интенсивность шума, при которой наблюдается локальный максимум. Наличие данного максимума связано не только с усилением выходной амплитуды сигнала, но и с тем, что на выходе бистабильной системы изменяется также спектральная плотность шума $N(\omega)$. Из [3] следует, что эта плотность начинает спадать в области частот, близких к μ_1 . Именно этими двумя факторами объясняется возникновение максимума на кривой S/N , который соответствует примерному совпадению частоты сигнала ω_0 с собственной частотой μ_1 . В этом смысле СР можно

относительно к разряду резонансных явлений. Отметим, что усиление сигнала с небольшими значениями амплитуды происходит при движении частицы на возрастающей ветви потенциальной функции $U(\eta)$.

Однако неравновесный поток переходов через барьер может привести к усилению сигнала и на спадающей ветви потенциала. Для этого необходимо, во-первых, рассмотреть случай сигнальных амплитуд $A > a\eta_0$. При этом периодическая внешняя сила вынуждает частицу двигаться по спадающей ветви потенциала. Во-вторых, следует рассмотреть случай высоких сигнальных частот $\omega_0 \approx \mu_2$. Тогда наиболее оптимальные условия приема сигнала следует ожидать при $\omega_0 \approx \mu_1 \approx \mu_2$, т.е. там, где интенсивность шума D порядка или больше высоты барьера U_0 .

Используя результаты работы [3], нетрудно получить следующий коэффициент передачи для потенциала (2):

$$q = \frac{(S/N)_{\text{вх}}}{(S/N)_{\text{вх}}} = \frac{\mu_1^2(k+1)^2 + \alpha^2\omega_0^2}{\mu_1(\mu_1 + 2ak) + \alpha\omega_0^2}, \quad (3)$$

$$K = \frac{8U_0}{D}, \quad \alpha = 1 + \frac{k\mu_1}{\mu_e},$$

где $U_0 = a^2/4b$ – высота потенциального барьера. Частота μ_1 для не слишком больших интенсивностей шума ($D \lesssim U_0$) определяется формулой Крамерса [5]:

$$\mu_1 = \frac{\sqrt{2}}{\pi} a \exp\left(-\frac{U_0}{D}\right). \quad (4)$$

Частота $\mu_e = 2a$ по порядку величины совпадает с μ_2 и определена в [3] как эффективное значение высших собственных частот μ_2, μ_3, \dots

Хотя формула (3), строго говоря, неприменима для сигнальных амплитуд $A > a\eta_0$, мы предполагаем, что она в данном случае определяет хотя бы правильное качественное поведение коэффициента передачи. Поэтому, рассматривая в (3) предел высоких частот ω_0 сигнала с учетом (4), получаем

$$q = \alpha = 1 + \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \frac{U_0}{D} \exp\left(-\frac{U_0}{D}\right). \quad (5)$$

Из (5) следует, что коэффициент передачи превышает единицу. С ростом D он достигает максимального значения 1.66 при $D = U_0$ и затем спадает.

С целью проверки возможности достижения значений $q > 1$ в работе был проведен численный эксперимент. При этом модель белого шума с верхней границей по частоте $f_{\text{ш}} = 30 \text{ кГц}$ и другие условия вполне идентичны эксперименту [6]. Был рассмотрен потенциал (2) и выбраны следующие параметры: $b = 5 \cdot 10^{-9} \text{ п}^{-2} \text{ с}^{-1}$, $A = 0.3 \text{ пс}^{-1}$,

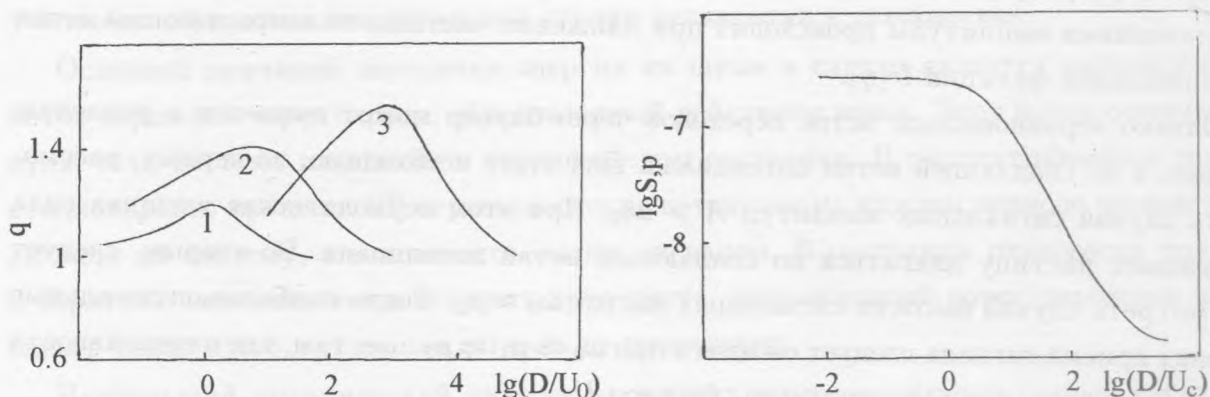


Рис. 3. Коэффициент передачи для трех значений параметра a бистабильной системы (кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям $a = 500, 100, 10 \text{ с}^{-1}$).

Рис. 4. Амплитуда выходного сигнала в зависимости от интенсивности шума ($a = 500 \text{ с}^{-1}$).

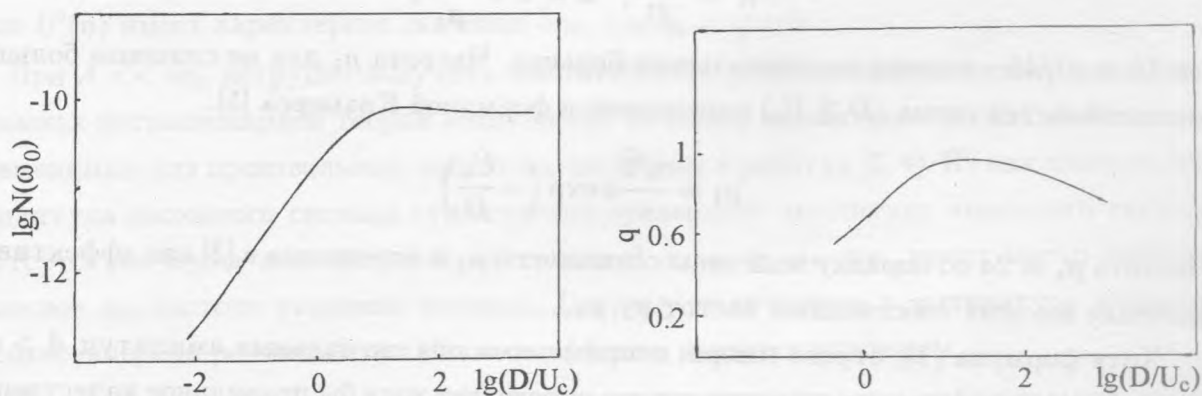


Рис. 5. Спектральная плотность шума на сигнальной частоте как функция D ($a = 500 \text{ с}^{-1}$).

Рис. 6. Коэффициент передачи для измененной частоты сигнала.

$f_0 = \omega_0/2\pi = 40 \text{ Гц}$, где p – размерность физической величины η . Численный анализ проводился для нескольких значений параметра a при условии $A > a\eta_0$. Результаты численного анализа представлены на рис. 3. Видно, что коэффициент передачи действительно может принимать значения, превышающие единицу, а его зависимость от D вполне подобна (5). Наблюдаемый сдвиг максимума коэффициента передачи можно объяснить сложной зависимостью частот μ_1 и μ_2 от интенсивности шума и коэффициен-

та a при $D > U_0$. В частности, как показано в [3], частота μ_1 при $D > U_0$ не подчиняется формуле (4). На рис. 4 и 5 изображены соответственно амплитуда выходного сигнала и спектральная плотность шума на сигнальной частоте в зависимости от D . Следует отметить отсутствие локального максимума не только на кривой амплитуды выходного сигнала, но и на кривой отношения S/N , которые характерны для классического явления СР. Численный счет указывает также на зависимость коэффициента передачи от частоты сигнала f_0 . Так, если частоту f_0 увеличить в три раза, то q принимает значения меньше единицы, что и изображено на рис. 6.

Таким образом, проведенный анализ СР указывает на существование области параметров бистабильной системы, в которой $q > 1$ и, следовательно, данное явление может иметь практическое использование. В этом случае система не только усиливает сигнал в достаточно широкой полосе частот, но и является частотным фильтром для шумового воздействия. Отметим, что эта область параметров наименее исследована в литературе как экспериментально, так и теоретически. Слабое развитие теоретических исследований, в первую очередь, связано с невозможностью использовать здесь нестационарную теорию возмущений по малой амплитуде сигнала.

Авторы благодарят Карташова В. М. за проведение численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Benzi R., Sutera S., Vulpiani A. J. Phys. A, **14**, N 11, L453 (1981).
- [2] Gammaitoni L., Hanggi P., Jung P., Marchesoni F. Rev. Mod. Phys., **70**, N 1, 223 (1998).
- [3] Карташов В. М., Решетняк С. А., Третьяков Г. Н., Щеглов В. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 9, 12 (2000).
- [4] Hu G., Haken H., Ning C. Z. Phys. Lett. A, **172**, N 1-2, 21 (1992).
- [5] Kramers H. A. Physica (The Hague), **7**, 284 (1940).
- [6] Карташов В. М., Решетняк С. А., Третьяков Г. Н., Щеглов В. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 9, 19 (2000).

Поступила в редакцию 27 февраля 2001 г.