УДК 538.9

О КОЛЛЕКТИВНЫХ И ОДНОЧАСТИЧНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЯХ В СВЕРХТЕКУЧЕМ ГЕЛИИ

В. Б. Бобров[1,2], С. А. Тригер[1,3]

На основе анализа имеющихся теоретических и экспериментальных данных показано, что спектр коллективных возбуждений не совпадает со спектром одночастичных возбуждений в сверхтекучем гелии ^{4}He. Установлено, что коллективные возбуждения с фонон-ротонным спектром не имеют непосредственного отношения к явлению сверхтекучести.

Ключевые слова: сверхтекучий гелий, коллективные возбуждения, одночастичные возбуждения.

1. Введение. Понятие о квазичастицах как квантованных коллективных возбуждениях впервые ввел Ландау [1] для феноменологического объяснения явления сверхтекучести в жидком ^{4}He. При этом Ландау исходил из гидродинамического подхода к определению квазичастиц как долгоживущих (слабозатухающих) возбуждений в системе. На этой основе Ландау предсказал так называемый фонон-ротонный энергетический спектр таких возбуждений $E_{ph-r}(q) = \hbar\omega_{ph-r}(q)$ (зависимость энергии возбуждений от их импульса $\hbar\mathbf{q}$), что позволило ему дать описание экспериментальных данных по теплоемкости и второму звуку в сверхтекучем гелии [2].

Десятью годами позже Коэн и Фейнман [3] предложили экспериментальный способ для определения спектра коллективных возбуждений по значениям максимумов $E_{\max}(q) = \hbar\omega_{\max}(q)$ в динамическом структурном факторе жидкости

$$S(q,\omega) \equiv \frac{1}{V}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t)\langle\hat{\rho}_{\mathbf{q}}(t)\hat{\rho}_{-\mathbf{q}}(0)\rangle dt, \quad \hat{\rho}_{\mathbf{q}} = \sum_{\mathbf{p}} \hat{a}^{+}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}\hat{a}_{\mathbf{p}}. \tag{1}$$

В (1) угловые скобки обозначают усреднение с большим каноническим распределением Гиббса с точным гамильтонианом рассматриваемой системы, находящейся в макроско-

[1] Объединенный институт высоких температур РАН, 127412 Россия, Москва, ул. Ижорская, 13/19.
[2] Национальный исследовательский университет "МЭИ", 111250 Россия, Москва, ул. Красноказарменная, 14.
[3] Институт общей физики РАН, 119991 Россия, Москва, ул. Вавилова, 38; e-mail: satron@mail.ru.

пическом объеме V, оператор $\hat{\rho}_q(t)$ является фурье-образом оператора плотности числа частиц в представлении Гейзенберга $\hat{a}^+_{\mathbf{p}}$ и $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ – соответственно, операторы рождения и уничтожения частиц с импульсом $\hbar\mathbf{p}$, которые удовлетворяют известным соотношениям коммутации. Здесь и далее спиновые индексы опущены.

Значения функции $S(q,\omega)$ в зависимости от величин импульса $\hbar\mathbf{q}$ и энергии $E = \hbar\omega$ могут быть найдены экспериментально по сечению неупругого рассеяния нейтронов и рентгеновских лучей в жидкости (см., напр., [4]). Предложение Коэна и Фейнмана [3] дает возможность установить соответствие между явно определенной функцией $S(q,\omega)$, которую можно приближенно вычислить на основе (1), и понятием коллективных возбуждений как квазичастиц, отвечающих максимумам $S(q,\omega)$.

При этом, как известно, максимумы в функции $S(q,\omega)$ непосредственно связаны с полюсами функции отклика "плотность-плотность" $\chi(q,\omega) \equiv \frac{1}{V}\langle\langle\hat{\rho}_{\mathbf{q}}|\hat{\rho}_{-\mathbf{q}}\rangle\rangle_\omega$, или нулями диэлектрической функции $\epsilon(q,\omega)$. Это позволяет придать ясный физический смысл понятию коллективных возбуждений.

Необходимо отметить, что приведенные выше рассуждения, касающиеся коллективных возбуждений в жидкости, являются совершенно общими и не зависят от того, наблюдается ли в рассматриваемой системе явление сверхтекучести или нет.

Ротонная часть спектра в сверхтекучем гелии ^{4}He (He II) была впервые экспериментально обнаружена в работе [5], а полностью дисперсионная кривая фонон-ротонного спектра была экспериментально определена в работах [6, 7] (см. подробнее [8]).

Наряду с коллективными возбуждениями в статистической теории систем многих частиц (фермионов или бозонов) важнейшим является также понятие о квазичастицах, связанных с особенностями (полюсами) другой функции – одночастичной функции Грина $G(q,\omega) \equiv \langle\langle\hat{a}_q|\hat{a}^+_q\rangle\rangle_\omega$. Такие квазичастицы мы будем называть далее одночастичными возбуждениями.

Вопрос о соотношении между энергетическим спектром коллективных возбуждений, который определяется по положениям максимумов $S(q,\omega)$ или особенностями функции отклика $\chi(q,\omega)$, и энергетическим спектром одночастичных возбуждений, который определяется особенностями $G(q,\omega)$, до сих пор не решен и в общей форме даже не ставился. Согласно существующим теориям и полученным приближенным результатам полюса функций $\chi(q,\omega)$ и $G(q,\omega)$ различны в нормальных системах. В то же время в системах с конденсатом Бозе–Эйнштейна (КБЭ), согласно теоретическим подходам, основанным на понятии об аномальных средних, полюса этих функций совпадают [8, 9]. Сложность вопроса связана, в частности, с отсутствием методов экспериментального определения функции $G(q, \omega)$ и ее особенностей. Рассмотрению проблемы соотношения между спектрами коллективных и одночастичных возбуждений, которая имеет принципиальное значение как для построения последовательной теории систем с КБЭ, так и для интерпретации многочисленных экспериментов по определению функции $S(q, \omega)$, посвящена эта работа. Нами приведены убедительные данные, которые свидетельствуют о том, что особенности в функциях $\chi(q, \omega)$ и $G(q, \omega)$ не совпадают не только в нормальных системах, но и в системах с КБЭ.

2. Спектры коллективных и одночастичных возбуждений. Как известно из статистической теории систем многих частиц (фермионов или бозонов), описание квазичастиц, являющихся одночастичными возбуждениями, существенно зависит от того, являются ли исходные частицы фермионами или бозонами (см., напр., [4]).

В свою очередь, максимумы в динамическом структурном факторе $S(q, \omega)$ непосредственно связаны с особенностями (полюсами) функции отклика "плотность-плотность" $\chi(q, \omega)$ (см., напр., [10])

$$S(q, \omega) = -\frac{2\hbar}{1 - \exp(-\hbar\omega/T)} \operatorname{Im} \chi(q, \omega) \tag{2}$$

или с нулями диэлектрической функции $\epsilon(q, \omega)$ [11]

$$S(q, \omega) = -\frac{2\hbar}{1 - \exp(-\hbar\omega/T)} \cdot \frac{1}{v(q)} \operatorname{Im} \frac{1}{\epsilon(q, \omega)}. \tag{3}$$

Здесь $v(q)$ – фурье-образ парного потенциала межчастичного взаимодействия, T – температура рассматриваемой системы.

Коллективные возбуждения, соответствующие особенностям функций $\chi(q, \omega)$ и $S(q, \omega)$, являются бозонами, независимо от того, бозонами или фермионами являются исходные реальные частицы в рассматриваемой системе. Это связано с четностью мнимых частот $\hbar\omega_n = 2\pi nTi, n$ – натуральное число в температурной функции Грина "плотность-плотность", аналитическим продолжением которой в верхнюю полуплоскость ω является функция $\chi(q, \omega)$ (см., напр., [12]). Типичным примером коллективных возбуждений являются фононы и плазмоны. При этом число таких квазичастиц зависит от термодинамических параметров рассматриваемой системы, что соответствует химическому потенциалу, тождественно равному нулю при любых термодинамических параметрах системы (см., напр., [13]). При этом для одночастичных возбуждений химический потенциал μ определяется по заданному числу исходных частиц (по крайней мере, в нерелятивистском приближении, когда число частиц в системе фиксируется массовой плотностью).

Таким образом, в общем случае коллективные возбуждения и одночастичные возбуждения не связаны друг с другом непосредственно. Однако возможно исключение из этого общего утверждения. Совпадение в описании коллективных и одночастичных возбуждений возможно, но только при рассмотрении систем, состоящих из исходных бозонов. Для решения проблемы, связанной с различиями между химическими потенциалами для коллективных и одночастичных возбуждений, можно представить себе ситуацию, когда энергетический спектр одночастичных возбуждений $E_{SP}(q)$, который в общем случае зависит от термодинамических параметров системы, связан с химическим потенциалом рассматриваемой системы соотношением

$$E_{SP}(q \to 0) = \mu. \tag{4}$$

Это условие выполняется не только для идеального газа бозонов [12], но и для системы взаимодействующих бозонов при температурах, которые меньше или равны температуре перехода в состояние с КБЭ T_{BEC} [14]. Только в этом случае спектр для одночастичных возбуждений, понимаемый как

$$\hbar\omega_{SP}(q) = E_{SP}(q) - E_{SP}(q \to 0), \tag{5}$$

может соответствовать фонон-ротонному спектру коллективных возбуждений, который наблюдается экспериментально. Иными словами, совпадение спектров коллективных и одночастичных возбуждений в принципе возможно только в системе бозонов при наличии КБЭ. Однако вопрос о том имеет ли в действительности место такое совпадение в системах с КБЭ оставался до сих пор открытым.

3. Гипотеза Пенроуза–Онзагера и аномальные средние. Общее математическое соотношение для описания КБЭ в системе взаимодействующих бозонов было впервые предложено Пенроузом и Онзагером [15, 16] как существование недиагонального дальнего порядка (off-diagonal long-range order (ODLRO)) в одночастичной матрице плотности. В представлении вторичного квантования это утверждение имеет вид

$$\lim_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\to\infty} \gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}') = n_0 \neq 0, \quad \gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}') \equiv \langle \hat{\Psi}^{+}(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r}')\rangle, \tag{6}$$

где n_0 – плотность числа частиц в КБЭ, $\hat{\Psi}^{+}(r)$ и $\hat{\Psi}(r)$ – соответственно полевые операторы рождения и уничтожения для рассматриваемой системы исходных частиц

$$\hat{\Psi}^{+}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{p}} \hat{a}^{+}_{\mathbf{p}} \exp(-i\mathbf{pr}), \quad \hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \exp(i\mathbf{pr}). \tag{7}$$

Соотношение (6) обобщает критерий существования КБЭ в слабонеидеальном бозе-газе, который был предложен ранее Боголюбовым [17].

В теории систем с КБЭ принято считать что усреднение в (6) подразумевает учет нарушенной симметрии

$$\langle\hat{\Psi}^{+}(\mathbf{r})\rangle \equiv \Phi^{*}(r) \neq 0, \quad \langle\hat{\Psi}(\mathbf{r})\rangle \equiv \Phi(\mathbf{r}) \neq 0, \tag{8}$$

хотя условия (8) не следуют из (6), а являются самостоятельными гипотезами, достаточными, но не необходимыми для выполнеия (6). В (8) величина $\Phi(r)$ может быть интерпретирована как "волновая функция КБЭ", которая характеризуется амплитудой и фазой [4]. Если рассматривается однородная система, то согласно (7), (8) в КБЭ находятся только частицы с нулевым импульсом: $\langle\hat{a}_{\mathbf{p}}\rangle = 0$ для $\mathbf{p} \neq 0$ и $\langle\hat{a}_0\rangle = \sqrt{\langle\hat{N}_0\rangle}$, где $\langle\hat{N}_0\rangle \equiv \langle\hat{a}_0^{+}\hat{a}_0\rangle = n_0 V$. Без ограничения общности мы можем считать, что для однородного КБЭ фаза равна нулю.

Как впервые показал Беляев [9], учет КБЭ при описании системы взаимодействующих бозонов в формулировке (6)–(8) приводит к необходимости рассматривать вместо одной функции Грина $G(q,\omega)$ матрицу одночастичных функций Грина $G_{\alpha\beta}$, которая включает в себя помимо $G_{11} \equiv G$ еще и аномальные функции Грина. В этом подходе химический потенциал μ удовлетворяет известному соотношению Гугенгольца–Пайнса [18] (см. (4)).

Для установления связи между спектрами коллективных и одночастичных возбуждений необходимо учесть наличие КБЭ при вычислении функции отклика $\chi(q,\omega)$. При справедливости (6)–(8) оператор $\hat{\rho}_q$ (1) можно представить как

$$\hat{\rho}_q = \sqrt{\langle\hat{N}_0\rangle}\cdot\hat{A}_{\mathbf{q}} + \hat{\rho}_{\mathbf{q}}^{(n)}, \quad \hat{A}_{\mathbf{q}} = \hat{a}_{\mathbf{q}} + \hat{a}_{-\mathbf{q}}^{+}, \quad \hat{\rho}_{\mathbf{q}}^{(n)} = \sum_{\mathbf{p}\neq 0, \mathbf{p}\neq q} \hat{a}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}^{+}\hat{a}_{\mathbf{p}}. \tag{9}$$

Таким образом, функция отклика $\chi(q,\omega)$ может быть представлена как сумма "конденсатной" и "нормальной" функций отклика [10]

$$\chi = \chi^{(c)} + \chi^{(n)}, \quad \chi^{(c)} = \Lambda_\alpha G_{\alpha\beta}\Lambda_\beta, \quad \chi^{(n)} = \langle\langle\hat{\rho}_{\mathbf{q}}^{(n)}|\hat{\rho}_{-\mathbf{q}}^{(n)}\rangle\rangle_\omega, \tag{10}$$

где Λ_α – вершинная функция для одночастичных функций Грина в системе с нарушенной симметрией (6)–(8). Величина Λ_α обращается в нуль, если $n_0 = 0$. При этом $\chi = \chi^{(n)}$ для температур $T > T_{BEC}$.

Впервые подробное исследование функции отклика $\chi(q,\omega)$ (10) в рамках диаграммной техники, разработанной Беляевым для бозе-систем с нарушенной симметрией, было проведено Гаворе и Нозьером [19]. Они проанализировали структуру матрицы двухчастичной функции Грина K_2, которая однозначно определяет функцию отклика $\chi(q,\omega)$. Этот анализ затем был воспроизведен в рамках диэлектрического формализма (см. подробнее [8] и цитированную там литературу). В результате оказалось, что особенности (полюса) функций $G_{\alpha\beta}$ и χ определяются одной и той же функцией, которая однозначно связана с $\epsilon(q,\omega)$ (3). При этом в отсутствие нарушения симметрии ($\Lambda_\alpha = 0$) полюса функций $G_{\alpha\beta}$ и χ не связаны между собой.

На первый взгляд, рассмотренные выше результаты являются вполне общими и могут быть применены для рассмотрения газов и жидкостей с КБЭ. Однако недавно Кита [20] впервые обратил внимание, что рассмотрение, выполненное Гаворе и Нозьером [19], а также другими авторами в рамках диэлектрического формализма, основано на анализе структуры рядов теории возмущений, выполненном раздельно для функций $G_{\alpha\beta}$ и K_2.

Таким образом, такой анализ может страдать от двусмысленности относительно того, как определять собственно энергетические и вершинные функции, которые присущи КБЭ, в соотношении с двухчастичными функциями Грина. Иными словами, подобный анализ необходимо проводить в рамках формализма, допускающего единое рассмотрение как одночастичных, так и двухчастичных функций Грина.

Для нормальных систем такой формализм, основанный на процедуре функционального дифференцирования при наличии заданного внешнего поля, был разработан Беймом и Кадановым [21]. Этот метод позволяет вывести формально точные выражения для двухчастичных функций Грина с точки зрения однозначно определенных собственно энергетических и вершинных функций. Кроме того, он может быть использован в практических расчетах двухчастичных функций Грина с использованием приближения Бейма [22]. На основе обобщения этого подхода для рассмотрения бозе-систем в рамках концепции аномальных средних в [20] при рассмотрении конкретного потенциала было установлено, что полюса функции отклика χ не совпадают с полюсами матрицы одночастичных функций Грина $G_{\alpha\beta}$ в противоречии с утверждением Гаворе и Нозьера [19]. Причина такого расхождения результатов связана с проблемой однозначности определения собственно энергетических и вершинных функций и их диаграммного представления [20].

4. Экспериментальные данные для динамического структурного фактора в жидком гелии. Выясним теперь, как рассмотренные выше теоретические результаты соотносятся с имеющимися экспериментальными данными для динамического структурного фактора $S(q,\omega)$.

Прежде всего, необходимо отметить, что согласно (2), (3) максимумы в функции $S(q,\omega)$ могут быть связаны не только с коллективными возбуждениями при выполнении условий $\mathrm{Im}\,\epsilon(q,\omega) \to 0$ ($\mathrm{Im}\,\epsilon(q,\omega) << \mathrm{Re}\,\epsilon(q,\omega)$), но и с максимумами функции $\mathrm{Im}\,\epsilon(q,\omega)$, которые можно интерпретировать как "сильное поглощение", в которых $S(q,\omega)$ имеет минимум(ы), вслед за которыми обязан(ы) следовать максимум(ы), в силу справедливости следующих общих соотношений

$$\lim_{\omega\to 0} \mathrm{Im}\,\epsilon(q,\omega) = 0, \quad \lim_{\omega\to\infty} \mathrm{Im}\,\epsilon(q,\omega) = 0, \quad \mathrm{Im}\,\epsilon(q,\omega) \geq 0. \tag{11}$$

При этом максимумы функции $S(q,\omega)$, связанные с нулями $\mathrm{Re}\epsilon(q,\omega)$, характеризуются более острыми пиками, чем максимумы, обусловленные наличием сильного поглощения, связанного с поведением $\mathrm{Im}\epsilon(q,\omega)$ (см., напр., [23, 24]). По мере увеличения значений волновых векторов q максимумы функции $S(q,\omega)$ становятся более "размытыми", как и при увеличении температуры. В то же время фононная часть спектра коллективных возбуждений практически не изменяется с повышением температуры и характерна не только для жидкого гелия (как в сверхтекучей фазе, так и в нормальной фазе), но и для любых жидкостей, включая жидкие металлы (см. [25, 26] и цитированную там литературу).

Однако недавно на основе эксперимента по неупругому рассеянию нейтронов фонон-ротонный спектр коллективных возбуждений был обнаружен для двумерного слоя жидкого ^{3}He в нормальном состоянии при температурах ниже 100 mK [27]. При этом в области ротонных возбуждений пик в $S(q,\omega)$ является острым, что подтверждает наличие ротонов и в ферми-жидкости в отсутствие КБЭ вопреки описанному выше сценарию Гаворе и Нозьера. Интерпретация полученных экспериментальных результатов адекватно описывается в рамках развитой в [28] теории. В совокупности с теоретическим результатом Кита [20] это подтверждает предположение (см. [14, 26, 29] и цитированную там литературу) о несовпадении спектров коллективных и одночастичных возбуждений в сверхтекучем ^{4}He (He II). Более того, еще в 1961 году в экспериментах Хеншоу и Вудса [7] был обнаружен фонон-ротонный спектр в нормальном жидком ^{4}He.

Эти экспериментальные данные убедительно показывают, что фонон-ротонный спектр, определяемый по положениям максимумов в функции $S(q,\omega)$, характерен не только для сверхтекучего ^{4}He, но является универсальной характеристикой жидкого состояния. Отличительной особенностью сверхтекучего ^{4}He вплоть до температур около 1 K является то, что максимумы в $S(q,\omega)$, включая область существования ротонов, являются хорошо определенными (не размытыми), как впрочем и в двумерном жидком ^{3}He при еще более низких температурах. Это позволяет интерпретировать положение соответствующих максимумов как спектр коллективных возбуждений. С повышением температуры максимумы в функции $S(q, \omega)$ достаточно сильно размываются в области волновых векторов, отвечающих максон-ротонной части спектра, поэтому эти максимумы уже не характеризуют спектр коллективных возбуждений.

5. Заключение. Нам остается убедиться в том, что такая интерпретация не противоречит самой теории сверхтекучести Ландау, в том числе критерию сверхтекучести. В своей первой работе Ландау [1] предполагал существование двух типов элементарных возбуждений в сверхтекучем гелии: фононов, связанных с потенциальным движением жидкости, и “ротонов Ландау” – квантованных возбуждений, обладающих щелью при нулевом импульсе. Однако в рамках такой модели ему не удалось дать количественное описание экспериментальных данных по скорости второго звука, которая была с большой точностью измерена Пешковым [30]. Поэтому Ландау в своей следующей работе [2] ограничился рассмотрением только одного типа возбуждений с фонон-ротонным энергетическим спектром. При этом ротонный участок спектра уже не должен ассоциироваться с вихревым движением [31].

Отметим теперь, что наблюдаемая в сверхтекучем гелии критическая скорость оказывается на один-два порядка меньше, чем критическая скорость, связанная с ротонной щелью. Поэтому описание механизма срыва сверхтекучести в рамках критерия Ландау не может быть связано с ротонами (см. подробнее [32]). В результате в настоящее время срыв сверхтекучести при движении сверхтекучего гелия в капиллярах связывают с процессами рождения протяженных квантовых вихрей Онсагера–Фейнмана или замкнутых вихревых нитей (петель, колец), что, в частности, позволяет описать экспериментальную зависимость критической скорости, при которой происходит срыв сверхтекучести, в зависимости от размеров отверстия в капилляре [33, 34].

Таким образом, коллективные возбуждения с фонон-ротонным спектром не имеют непосредственного отношения к явлению сверхтекучести.

Это утверждение полностью соответствует мысли Пайнса [35] о том, что спектры коллективных возбуждений в жидких ^{4}He и ^{3}He в большей степени обусловлены взаимодействием частиц, нежели эффектами квантовой статистики.

Подводя итоги проведенного рассмотрения, мы можем сделать следующие выводы:

1) хотя сверхтекучий ^{4}He является бозе-жидкостью с КБЭ, спектр коллективных возбуждений в нем не совпадает со спектром одночастичных возбуждений,

2) отличительной особенностью квантовых жидкостей – сверхтекучего ^{4}He при температурах, меньших температуры T_{BEC}, и двумерного нормального жидкого ^{3}He при очень низких температурах является наличие слабозатухающих коллективных возбуждений с фонон-ротонным спектром,

3) фонон-ротонный спектр, соответствующий положениям максимумов в динамическом структурном факторе, является универсальным свойством жидкостей,

4) коллективные возбуждения с фонон-ротонным спектром не имеют непосредственного отношения к явлению сверхтекучести.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-19-01492).

Авторы благодарны А. Г. Загороднему, А. М. Игнатову, А. А. Рухадзе, А. Г. Храпаку и В. Эбелингу за полезные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **11**, 592 (1941).

[2] Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **17**, 91 (1947).

[3] M. Cohen and R. P. Feynman, Phys. Rev. **107**, 13 (1957).

[4] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, часть 2 (М., Наука, 1978).

[5] H. Palevsky, K. Otnes, K. E. Larsson, et al., Phys. Rev. **108**, 1346 (1957).

[6] J. L. Yarnell, G. P. Arnold, P. J. Bendt, and E. C. Kerr, Phys. Rev. **113**, 1379 (1959).

[7] D. G. Henshaw and A. D. B. Woods, Phys. Rev. **121**, 1266 (1961).

[8] A. Griffin, *Excitations in a Bose-condensed Liquid* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).

[9] С. Т. Беляев, ЖЭТФ **34**, 417; 433 (1958).

[10] P. Nozieres and D. Pines, *Theory of Quantum Liquids, vol. II: Superfluid Bose Liquids* (Addison-Wesley, Redwood City, 1964).

[11] В. П. Силин, А. А. Рухадзе, *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред* (М., Госатомиздат, 1961).

[12] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике* (М., Наука, 1962).

[13] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, часть 1 (М., Наука, 1976).

[14] S. A. Trigger and P. P. J. M. Schram, Physica B **228**, 107 (1996).

[15] O. Penrose, Philos. Mag. **42**, 1373 (1951).

[16] O. Penrose and L. Onsager, Phys. Rev. **104**, 576 (1956).

[17] Н. Н. Боголюбов, Изв. АН СССР, сер. физ. **11**(1), 77 (1947) (N. N. Bogoliubov, J. Phys. USSR **11**, 23 (1947)).

[18] N. Hugenholtz and D. Pines, Phys. Rev. **116**, 489 (1959).

[19] J. Gavoret and P. Nozieres, Ann. Phys. **28**, 349 (1964).

[20] T. Kita, Phys. Rev. B **81**, 214513 (2010).

[21] G. Baym and L. Kadanoff, Phys. Rev. **124**, 287 (1961).

[22] G. Baym, Phys. Rev. **127**, 1391 (1962).

[23] В. Б. Бобров, Ю. П. Власов, С. А. Тригер, ЖЭТФ **102**, 107 (1992).

[24] V. B. Bobrov, S. A. Trigger, and Yu. P. Vlasov, Physica B **203**, 95 (1994).

[25] A. M. Belyayev, V. B. Bobrov, and S. A. Trigger, J. Phys.: Condens. Matter **1**, 9965 (1989).

[26] V. B. Bobrov, S. A. Trigger, and D. I. Litinski, arXiv:1407.6184 [cond-mat.other] (2014).

[27] H. Godfrin, M. Meschke, H.-J. Lauter, et al., Nature **483**, 576 (2012).

[28] H. M. Böhm, R. Holler, E. Krotscheck, and M. Panholzer, Phys. Rev. B **22**, 224505 (2010).

[29] V. B. Bobrov, S. A. Trigger, and I. M. Yurin, Phys. Lett. A **374**, 1938 (2010).

[30] В. П. Пешков, ЖЭТФ **16**, 1000 (1946) (V. P. Peshkov, J. Phys. USSR **10**, 389 (1946)).

[31] L. P. Pitaevskii, J. Low Temp. Phys. **87**, 127 (1992).

[32] В. Б. Бобров, С. А. Тригер, Краткие сообщения по физике ФИАН **40**(6), 48 (2013).

[33] R. J. Donnelly, *Quantized Vortices in Helium II* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).

[34] M. S. Paoletti, D. P. Lathrop, Annual Rev. Cond. Matter Phys. **2**, 213 (2011).

[35] D. Pines, Physics Today **34**, 106 (1981).

Поступила в редакцию 24 сентября 2014 г.