УДК 51-73;535.14

РЯДЫ КАПТЕЙНА И ИЗЛУЧЕНИЕ ФОТОНА

А. И. Никишов

Получены суммы нескольких видов рядов Каптейна и найдены соотношения между ними. Особое внимание уделено рядам, суммы которых выражаются через трансцендентные функции. Найдены их асимптотики. В ряде случаев получены интегральные представления и приведены к виду, удобному для численных расчетов. Найдено время жизни электрона в постоянном электромагнитном поле до излучения фотона. Отмечено, что это время увеличивается с энергией ультрарелятивистского электрона в сильном постоянном поле.

Ключевые слова: ряды Каптейна, излучение фотона.

Ряды Каптейна, линейные по функциям Бесселя, мы называем линейными. Ряды, суммы которых даются алгебраическими функциями, называем алгебраическими. В противном случае ряды называем трансцендентными.

Линейные трансцендентные ряды. Рассмотрим ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^m}{m}J_m(mx)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}d\theta\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}[ae^{-i(\theta-x\sin\theta)}]^m=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}d\theta\ln[1-ae^{-i(\theta-x\sin\theta)}]= \tag{1}$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}d\theta\{\ln[1-ae^{-i(\theta-x\sin\theta)}]+\ln[1-ae^{i(\theta-x\sin\theta)}]\}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}d\theta\ln[1+a^2-2a\cos(\theta-x\sin\theta)]. \tag{2}$$

Левую часть равенства в (1) и правую часть последнего равенства можно представить в виде рядов по степеням x. Тогда сравнение членов этих левой и правой частей с

ФИАН, 119991 Россия, Москва, Ленинский пр-т, 53; e-mail: nikishov@lpi.ru

одинаковыми степенями x даёт выражения для интегралов по θ, зависящих от параметра a. Подробнее см. [1]. Заметим, что в [1] в разделе 2 в суммах по нечётным n (где суммирование идёт по $2n+1$) суммирование должно начинаться от $n = 0$, а не от $n = 1$.

Особый интерес представляет случай $|a| = 1$. Тогда из (1) и (2) имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}J_m(mx) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} d\theta \ln[2(1-\cos(\theta+y))] = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta \ln\left[2\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{x}{2}\sin\theta\right)\right]. \quad (3)$$

Здесь $y = -\frac{x}{2}\sin\theta$. Используя разложение $J_m(mx)$ по степеням x, получим

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}J_m(mx) = \frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{2^3}+\frac{x^4}{2^2\cdot 3}+\frac{23x^5}{2^7\cdot 3}+\frac{11x^6}{2^4\cdot 3\cdot 5}+\frac{841x^7}{2^9\cdot 3^2\cdot 5}+\frac{151x^8}{2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}+\cdots. \quad (4)$$

Дифференцируя это выражение, найдём

$$\sum_{m=1}^{\infty}J'_m(mx) = \frac{1}{2}+\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{2^3}+\frac{x^3}{3}+\frac{23\cdot 5x^4}{2^7\cdot 3}+\frac{11x^5}{2^3\cdot 5}+\frac{841\cdot 7x^6}{2^9\cdot 3^2\cdot 5}+\frac{151x^7}{2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}+\cdots. \quad (5)$$

Дифференцируя (3), найдём

$$\sum_{m=1}^{\infty}J'_m(mx) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} d\theta \cot\left(\frac{\theta}{2}-\frac{x}{2}\sin\theta\right)\sin\theta. \quad (6)$$

Для $1-x^2 << 1$, когда $m_{eff} >> 1$, имеем (см (9.3.43) и (10.4.16) в [2])

$$J'_m(mx) = -\left(\frac{2}{m}\right)^{2/3} Ai'\left(\left(\frac{m}{2}\right)^{2/3}(1-x^2)\right) = \frac{1-x^2}{\sqrt{3}\pi}K_{2/3}\left(\frac{m}{3}(1-x^2)^{3/2}\right). \quad (7)$$

Используя это в левой части (5) и заменяя суммирование интегрированием, получим

$$\sum_{m=1}^{\infty}J'_m(mx) = 2\sum_{n=1}^{\infty}J'_{2n}(2nx) = \frac{\sqrt{3}}{(1-x^2)^{1/2}}, \quad 1-x^2 << 1. \quad (8)$$

Здесь использовано соотношение (6.561.16) в [3]

$$\int_0^{\infty} dx x^{\alpha-1}K_\nu(ax) = 2^{\alpha-2}a^{-\alpha}\Gamma\left(\frac{\alpha+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-\nu}{2}\right). \quad (9)$$

Дифференцируя (8), найдём

$$\sum_{m=1}^{\infty}mJ''_m(mx) = \frac{\sqrt{3}}{(1-x^2)^{3/2}}, \quad 1-x^2 << 1. \quad (10)$$

Заметим теперь, что формулу (6) можно записать в виде

$$\sum_{m=1}^{\infty} J'_m(mx) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} d\theta \left[\sin\theta\left(\cot\varphi - \frac{1}{\varphi}\right) + \frac{2}{x}\left(\frac{\theta}{\theta - x\sin\theta} - \frac{6}{x(c+\theta^2)}\right)\right] +$$

$$+\frac{6}{\pi x^2\sqrt{c}}\arctan\frac{\pi}{\sqrt{c}}, \quad \varphi = \frac{\theta}{2} - \frac{x}{2}\sin\theta, \quad c = 6\frac{1-x}{x}. \tag{11}$$

Интеграл здесь порядка единицы и может быть табулирован. Для $1 - x^2 << 1$ главный член в правой части таков

$$\frac{6}{\pi\sqrt{c}}\arctan\frac{\pi}{\sqrt{c}} \approx \frac{6}{\pi\sqrt{c}}\frac{\pi}{2} = \frac{3}{\sqrt{c}} \approx \sqrt{\frac{3}{1-x^2}}, \tag{12}$$

как это и должно быть согласно с (8). Аналогично (11) найдём

$$\sum_{n=1}^{\infty} J'_{2n}(2nx) = \int\limits_0^{\pi} d\theta \sin\theta\cot\psi = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} d\theta\left[\sin\theta\left(\cot\psi - \frac{1}{\psi}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{x}\left(\frac{\theta}{\theta - x\sin\theta} - \frac{6}{x(c+\theta^2)}\right)\right] + \frac{3}{\pi x^2\sqrt{c}}\arctan\frac{\pi}{\sqrt{c}}, \quad \psi = \theta - x\sin\theta. \tag{13}$$

Дифференцируя (6), получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} mJ''_m(mx) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} d\theta\left(\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}\right)^2, \quad \varphi = \frac{\theta}{2} - \frac{x}{2}\sin\theta. \tag{14}$$

Суммируя по m уравнение Бесселя, записанное в виде

$$\left(\frac{d}{dx} + \frac{1}{x}\right)J'(mx) = \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)mJ(mx), \tag{15}$$

получим

$$\left(\frac{d}{dx} + \frac{1}{x}\right)\sum_{m=1}^{\infty} J'(mx) = \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\sum_{m=1}^{\infty} mJ(mx). \tag{16}$$

Аналогично (1) и (2) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}J_{2n}(2nx) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} d\theta\ln(2\sin\psi), \quad \psi = \theta - x\sin\theta. \tag{17}$$

Дифференцируя, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} J'_{2n}(2nx) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} d\theta\cot\psi\sin\theta, \quad \psi = \theta - x\sin\theta. \tag{18}$$

Дифференцируя ещё раз, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2nJ''_{2n}(2nx) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} d\theta \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\psi}. \tag{19}$$

Далее легко найдём

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2nJ_{2n}(2nx) = x^2 + \frac{7x^4}{3} + \frac{239x^6}{2^2\cdot 3\cdot 5} + \frac{1481x^8}{2^2\cdot 3^2\cdot 7} + \frac{292223x^{10}}{2^6\cdot 3^4\cdot 7} + \cdots. \tag{20}$$

Удерживая только члены с четной степенью x в (4), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} J_{2n}(2nx) = \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 3} + \frac{11x^6}{2^4\cdot 3\cdot 5} + \frac{151x^8}{2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7} + \frac{15619x^{10}}{2^8\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7} + \cdots. \tag{21}$$

Дифференцируя это выражение, найдём

$$\sum_{n=1}^{\infty} J'_{2n}(2nx) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{11x^5}{2^3\cdot 5} + \frac{151x^7}{2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7} + \frac{15619x^9}{2^7\cdot 3^4\cdot 7} + \cdots. \tag{22}$$

Учитывая (8), можно получить формулу, которая при разложении в ряд по степеням x дает формулу (22):

$$\sum_{n=1}^{\infty} J'_{2n}(2nx) = \frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}\left[1 + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{11x^4}{2^3\cdot 3\cdot 5} + \frac{59x^6}{2^4\cdot 3^2\cdot 7} + \frac{14971x^8}{2^7\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7} + \cdots\right]. \tag{23}$$

Далее нам потребуется выражение

$$\int_0^{\beta} dx \sum_{n=1}^{\infty} nJ_{2n}(2nx) = \frac{1}{4\sqrt{3}(1-\beta^2)^{3/2}}, \quad 1-\beta^2 << 1. \tag{24}$$

Дифференцируя его по β, получим выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} nJ_{2n}(2n\beta) = \frac{\sqrt{3}}{4(1-\beta^2)^{5/2}}, \quad 1-\beta^2 << 1, \tag{25}$$

которое можно проверить, используя формулу (40) ниже.

Аналогично (23) получим разложение суммы ряда при небольших x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2nJ_{2n}(2nx) = \frac{x^2}{(1-x^2)^{5/2}}\left[1 - \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2^3\cdot 5} + \frac{5x^6}{2^4\cdot 3^2\cdot 7} + \frac{103x^8}{2^7\cdot 3^4\cdot 7} + \cdots\right]. \tag{26}$$

Сходным образом найдём выражение для интеграла суммы трансцендентного ряда Каптейна при небольших β:

$$\int_0^\beta dx \sum_{n=1}^{\infty} nJ_{2n}(2nx) = \frac{\beta^3}{6(1-\beta^2)^{3/2}}\left[1 - \frac{\beta^2}{2\cdot 5} - \frac{\beta^4}{2^3\cdot 7} - \frac{19\beta^6}{2^4\cdot 3^3\cdot 7} - \frac{809\beta^8}{2^7\cdot 3^3\cdot 7\cdot 11} - \cdots\right]. \tag{27}$$

Билинейные алгебраические ряды. Начнём с соотношения, см. [5],

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}J_n^2(nx) = \frac{d}{dx}\left[x^2 J_n'^2(nx)\right]. \tag{28}$$

Оно легко проверяется выполнением в нём дифференцирований и использованием уравнения Бесселя. Умножая (28) на n^ν и суммируя по n, получим

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}\Sigma_1^\infty n^\nu J_n^2(nx) = \frac{d}{dx}\left[x^2\Sigma_1^\infty n^\nu J_n'^2(nx)\right]. \tag{29}$$

Полагая $\nu = -2$, имеем

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}\Sigma_1^\infty \frac{1}{n^2} J_n^2(nx) = \frac{d}{dx}\left[x^2\Sigma_1^\infty \frac{1}{n^2} J_n'^2(nx)\right]. \tag{30}$$

В левой части используем формулу Нильсона

$$\Sigma_1^\infty \frac{1}{n^2} J_n^2(nx) = \frac{x^2}{4}. \tag{31}$$

Выполняя затем дифференцирование в левой части, получим

$$(1-x^2)\frac{x}{2} = \frac{d}{dx}\left[x^2\Sigma_1^\infty \frac{1}{n^2} J_n'^2(nx)\right]. \tag{32}$$

Интегрируя здесь по x, получим аналог формулы Нильсона

$$\Sigma_1^\infty \frac{1}{n^2} J_n'^2(nx) = \frac{1}{4} - \frac{x^2}{8}. \tag{33}$$

Заметим, что формулу Нильсона (31) легко получить из формулы (17.33(2)) в [4]:

$$\Sigma_1^\infty \frac{1}{n^2} J_{2n}(2nx) = \frac{x^2}{2}.$$

Заменяя здесь $x \to x\sin\varphi$, интегрируя по φ и учитывая (39) (см. ниже), получим (31).

Далее дважды дифференцируем $J_n^2(y)$:

$$\frac{d}{dy}J_n^2(y) = 2J_n(y)J_n'(y), \quad \frac{d^2}{dy^2}J_n^2(y) = 2J'^2_n(y) + 2J_n(y)J_n''(y) =$$

$$= 2J'^2_n(y) + 2J_n(y)\left[\left(\frac{n^2}{y^2} - 1\right)J_n(y) - \frac{1}{y}J'_n(y)\right]. \tag{34}$$

Отсюда (см. (40.4) в [6])

$$J'^2_n(y) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}\frac{d}{dy} + \frac{d^2}{dy^2}\right) + \left(1 - \frac{n^2}{y^2}\right)\right]J^2_n(y). \tag{35}$$

Полагая $y = nx$, умножая это соотношение на n^ν и суммируя по n, получим

$$\Sigma_1^\infty n^\nu J'^2_n(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}\right)\Sigma_1^\infty n^{\nu-2}J^2_n(nx) + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\Sigma_1^\infty n^\nu J^2_n(nx). \tag{36}$$

Билинейные трансцендентные ряды. Имея дело с разложениями в степенные ряды, мы используем соотношение (8.442.1) в [3]:

$$J^2_n(y) = \Sigma_0^\infty(-1)^s\frac{(2n+2s)!y^{2(n+s)}}{s!2^{2(n+s)}(2n+s)![(n+s)!]^2}. \tag{37}$$

Аналогичное разложение для $J'^2_n(nx)$ можно получить из (36), но проще использовать (28) или (29), если нужна сумма. Используя (37), получим

$$\Sigma_1^\infty nJ^2_n(nx) = \frac{x^2}{4}\left(1 + \frac{7x^2}{2^2} + \frac{239x^4}{2^5\cdot 3} + \frac{7435x^6}{2^8\cdot 3^2} + \frac{292223x^8}{2^{13}\cdot 3^2} + \cdots\right). \tag{38}$$

Значительно проще получить его из (20), используя (6.681.9) в [3], имеющую вид

$$J^2_n(nx) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} d\varphi J_{2n}(2nx\cos\varphi). \tag{39}$$

Для $1 - x^2 << 1$ используем соотношения (9.3.35) и (10.4.14) в [2]

$$J_n(nx) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi\sqrt{3}}K_{1/3}\left[\frac{n}{3}(1-x^2)^{3/2}\right], \tag{40}$$

заменяем суммирование интегрированием и используем (6.576 4) в [3]. Тогда получим

$$\Sigma_1^\infty nJ^2_n(nx)\big|_{1-x^2<<1} = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\frac{1}{(1-x^2)^2}. \tag{41}$$

Аналогично (23) получим

$$\Sigma_1^\infty nJ^2_n(nx) = \frac{x^2}{4(1-x^2)^2}\left[1 - \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^5\cdot 3} - \frac{5x^6}{2^8\cdot 3^2} - \frac{23x^8}{2^{13}\cdot 3^2} - \cdots\right]. \tag{42}$$

Аналогичным образом найдём

$$\Sigma_1^\infty n J'^2_n(nx) = \frac{1}{2^2} + \frac{5x^2}{2^4} + \frac{127x^4}{2^7 \cdot 3} + \frac{3133x^6}{2^{10} \cdot 3^2} + \frac{101887x^8}{2^{15} \cdot 3^2} + \cdots . \tag{43}$$

Используя (7) с $m = 2n$ и уравнение (6.576 4) в [3], получим

$$\Sigma_1^\infty n J'^2_n(nx)\Big|_{1-x^2<<1} = \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \frac{1}{1-x^2}. \tag{44}$$

Аналогично соотношению (42) найдём

$$\Sigma_1^\infty n J'^2_n(nx) = \frac{1}{4(1-x^2)} \left[1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{7x^4}{2^5 \cdot 3} + \frac{85x^6}{2^8 \cdot 3^2} + \frac{1631x^8}{2^{13} \cdot 3^2} + \cdots \right]. \tag{45}$$

С помощью (37) получим

$$\Sigma_1^\infty \frac{1}{n} J_n^2(nx) = \frac{x^2}{4} \left[1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{11x^4}{2^5 \cdot 3} + \frac{151x^6}{2^8 \cdot 3^2} + \frac{15619x^8}{2^{13} \cdot 3^2 \cdot 5} + \cdots \right]. \tag{46}$$

Намного проще получить его, используя (21) и (39).

С помощью (39) и (3) получим сумму ряда в интегральной форме:

$$\Sigma_1^\infty \frac{1}{n} J_n^2(nx) = -\frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi d\psi \int_0^\pi d\theta \ln[2\sin(\theta - x\sin\psi\sin\theta)]. \tag{47}$$

Дифференцируя его, получим

$$\Sigma_1^\infty 2 J_n(nx) J'_n(nx) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi d\psi \int_0^\pi d\theta \cot(\theta - x\sin\psi\sin\theta)\sin\psi\sin\theta. \tag{48}$$

Вероятность излучения фотона. В классическом случае электрон в постоянном магнитном поле или в поле циркулярно поляризованной плоской волны движется по круговой орбите (в подходящей системе координат). Интенсивность излучения даётся формулой Шотта, см. §74 в [7]:

$$dI_n = \frac{e^2}{2\pi c}(n\omega_H)^2[\tan^2\theta J_n^2(n\beta\cos\theta) + \beta^2 J'^2_n(n\beta\cos\theta)]d\Omega, \quad \beta = \frac{v}{c}. \tag{49}$$

Проинтегрированная по углам интенсивность равна

$$I_n = \frac{2e^2}{v}\omega_H^2 \left[\beta^2 n J'_{2n}(2n\beta) - (1-\beta^2)\int_0^\beta dx n^2 J_{2n}(2nx)\right]. \tag{50}$$

В случае магнитного поля $\omega_H = \frac{eH}{mc}\sqrt{1-\beta^2}$.

Вероятность в единицу времени получается делением интенсивности на $\hbar n\omega_H$, ω_H есть частота первой гармоники: $dP_n = dI_n/\hbar n\omega$. Так (49), делённая на $\hbar n\omega_H$ и просуммированная по n, приводит к рядам (42) и (45).

Полная вероятность в единицу времени равна

$$P = \Sigma_1^\infty P_n = \frac{2e^2}{\hbar v}\omega_H \left[\beta^2 \Sigma_1^\infty J'_{2n}(2n\beta) - (1-\beta^2)\int_0^\beta dx \Sigma_1^\infty n J_{2n}(2nx)\right]. \tag{51}$$

Видно, что суммирование по n выражений для интенсивностей приводит к алгебраическим рядам, а суммирование вероятностей – к трансцендентным. Вероятность того, что в течение интервала времени t не произойдёт излучения фотона, равна $\exp(-Pt)$. Используя (23) и (27), получим

$$P = \frac{2e^2}{\hbar v}\frac{\omega_H}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\beta^3}{3}\left[1 + \frac{3\beta^2}{2\cdot 5} + \frac{41\beta^4}{2^3\cdot 5\cdot 7} + \frac{5^2\cdot 11\beta^6}{2^4\cdot 3^3\cdot 7} + \frac{28121\beta^8}{2^7\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11} + \cdots\right]. \tag{52}$$

В случае плоской циркулярно поляризованной волны ω_H есть частота волны.

Для $1-\beta << 1$ получим

$$P = \frac{e^2}{\hbar c}\frac{5}{2\sqrt{3}}\frac{eH}{mc}, \quad \frac{e^2}{\hbar c} = \alpha = 1/137. \tag{53}$$

Таким образом, в случае ультрарелятивистского электрона вероятность P в классическом случае не зависит от энергии. С другой стороны известно, что в ультрарелятивистском случае излучение одно и тоже в любом внешнем поле, мало меняющемся на длине формирования излучения. Тогда [см. (27') и (27") в [8], где $\frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \alpha = 1/137$]

$$W = \frac{5\alpha m}{2\sqrt{3}}\chi, \quad \chi = \frac{\sqrt{(eF_{\mu\nu}p^\nu)^2}}{m^3}. \tag{54}$$

Здесь W – вероятность в единицу собственного времени, $\tau = \sqrt{1-\beta^2}t$, $F_{\mu\nu}$ – тензор поля, p – импульс электрона, $\hbar = c = 1$, $Pt = W\tau$. Для магнитного поля $\chi = \frac{eHv}{m^2\sqrt{1-\beta^2}}$ и мы видим, что (53) согласуется с (54): $W\sqrt{1-\beta^2} = P$.

Интересно заметить, что в квантовом случае, когда $\chi >> 1$,

$$W = \frac{14\Gamma(2/3)\alpha m}{27}(3\chi)^{2/3}. \tag{55}$$

Это означает, что лабораторное время до излучения фотона возрастает в этом случае как $\left(\frac{E}{m}\right)^{1/3}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. I. Nikishov, arXiv:1.302.0978 [math.ph] 5 Feb 2013.

[2] М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по математическим функциям* (М., 1966).

[3] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов рядов и произведений* (М., 1962).

[4] G. N. Watson, *A Treaty on the Theory of Bessel Functions* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1966).

[5] G. A. Schott, *Electromagnetic radiation* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1912).

[6] Д. Д. Иваненко, А. А. Соколов, *Классическая теория поля* (М., 1951).

[7] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифщиц, *Теория поля* (М., Наука, 1973).

[8] А. И. Никишов, В. И. Ритус, ЖЭТФ **46**, 776 (1964).

Поступила в редакцию 4 марта 2014 г.