УДК 538.945

РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ КРИТИЧЕСКОГО ПОЛЯ И ПЛОТНОСТИ КРИТИЧЕСКОГО ТОКА ДЛЯ СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНЫ В РАМКАХ ТЕОРИИ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ

П. И. Безотосный, С. Ю. Гаврилкин, А. Н. Лыков, А. Ю. Цветков

Состояние сверхпроводящей пластины с транспортным током в параллельном ее поверхности магнитном поле изучалось с помощью уравнений Гинзбурга–Ландау (ГЛ). Эти уравнения в одномерном случае решались численными методами, при этом для параметра порядка использовались граничные условия общего вида. В рамках работы были получены и проанализированы температурные зависимости плотности критического тока и критического магнитного поля для сверхпроводящей пластины при различных значениях длины экстраполяции Λ – параметра, определяющего граничные условия. Было изучено влияние параметра Λ на вид полученных зависимостей.

Ключевые слова: сверхпроводящие плёнки, критический ток, граничные условия, теория Гинзбурга–Ландау.

Введение. Теория ГЛ имеет важное значение для изучения электромагнитных свойств сверхпроводящих структур. Численное решение уравнений ГЛ позволяет лучше понять процессы, происходящие в реальных структурах из сверхпроводящих материалов [1–5]. При этом развитие численного моделирования в рамках теории ГЛ заключается, в частности, в учете влияния границы на сверхпроводящие свойства структур конечного размера, таких как тонкие пленки и пластины [6]. Кроме того, учет влияния границы важен при расчетах для высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП), которые обладают слоистой кристаллической структурой [7–9].

В своих исследованиях мы рассматривали процессы, происходящие в сверхпроводящей пластине толщиной порядка длины когерентности ξ. Внешнее магнитное поле было

ФИАН, 119991 Россия, Москва, Ленинский пр-т, 53; e-mail: bezpi@sci.lebedev.ru.

направлено параллельно поверхности пленки, а транспортный ток – перпендикулярно направлению внешнего магнитного поля. В этом случае задача становится одномерной. Отметим, что даже в рамках одномерной задачи возможно получение решений, соответствующих наличию вихрей в пленке [10], поэтому в рамках данной работы, в частности, нами были рассмотрены случаи, когда пленка находится в смешанном состоянии. Считалось, что критический ток эквивалентен току распаривания. На основе описанного ниже подхода были получены и проанализированы зависимости критических параметров (критического магнитного поля, плотности критического тока) от температуры, а также от толщины пластины. При этом учитывалось влияние границы, что выражалось в использовании различных значений длины экстраполяции Λ.

Формулировка задачи. Ранее мы уже подробно описывали формальную постановку задачи [6]. В рамках работы численными методами решались уравнения ГЛ для случая длинной и широкой сверхпроводящей пластины толщиной D в магнитном поле H. Задача рассматривалась в декартовой системе координат (x, y, z) с осями y и z, направленными параллельно плоскости поверхности пластины, причем ось z направлена параллельно внешнему магнитному полю, а транспортный ток течет вдоль оси y. На основе самосогласованного решения системы уравнений ГЛ находились значения плотности критического тока J_c и критического магнитного поля H_c. Используя обычный метод выбора калибровки вектора-потенциала A, можно записать уравнения ГЛ в следующем виде:

$$\frac{d^2\psi}{dx_\xi^2} + (\psi - \psi^3) - \frac{U^2}{\kappa^2}\psi = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d^2U}{dx_\xi^2} - \frac{\psi^2}{\kappa^2}U = 0, \tag{2}$$

где $\kappa = \lambda/\xi$ – параметр ГЛ, λ – глубина проникновения магнитного поля, ξ – длина когерентности, а ψ – нормированный параметр порядка:

$$\psi = \frac{\Psi}{\Psi_0},$$

где Ψ_0 – параметр порядка в глубине сверхпроводника при нулевом внешнем магнитном поле. При этом векторный потенциал имеет лишь y-компоненту, $\mathbf{A} = \mathbf{e}_y A(x)$. Вместо размерных значений потенциала A, индукции поля B и плотности тока j_s в сверхпроводнике здесь введены безразмерные величины $U(x_\xi)$, $b(x_\xi)$ и $j(x_\xi)$:

$$A = \frac{\phi_0}{2\pi\kappa\xi}U,\ B = \frac{\phi_0}{2\pi\kappa^2\xi^2}b,\ j_s = \frac{c\phi_0}{8\pi^2\kappa^3\xi^3}j, \tag{3}$$

где ϕ_0 – квант потока.

Для уравнения (1) выберем граничные условия в виде:

$$\frac{d\psi}{dx_\xi}\Big|_{x_\xi=0} = \frac{\psi(0)}{\Lambda},$$

$$\frac{d\psi}{dx_\xi}\Big|_{x_\xi=d} = -\frac{\psi(d)}{\Lambda}, \qquad (4)$$

где $x_\xi = \frac{x}{\xi}$ и $d = \frac{D}{\xi}$. Отметим, что $\Lambda = \infty$ соответствует обычно используемым граничным условиям, при которых параметр порядка постоянен и не меняется вдоль оси "x". Поскольку транспортный ток I_t в пластине создает магнитное поле

$$H_I = \frac{2\pi}{c} I_t,$$

полное поле вблизи поверхностей пластины равно $H \pm H_I$, и граничные условия к уравнению (2) имеют следующий вид:

$$b|_{x_\xi=0} = h - h_I,\ b|_{x_\xi=d} = h + h_I,$$

где

$$h = \frac{H}{H_\xi},\ h_I = \frac{H_I}{H_\xi},\ H_\xi = \frac{\phi_0}{2\pi\kappa^2\xi^2}.$$

Глубина проникновения магнитного поля λ и длина когерентности ξ зависят от температуры, поэтому приведенные выражения являются неявными функциями температуры и формально справедливы при любой температуре T. Однако сами уравнения ГЛ применимы лишь в пределе $T \to T_c$. Остановимся более подробно на области применимости теории ГЛ. Формально такое условие, в области низких температур (в некотором отдалении от T_c)[1], формулируется в виде $T_c - T \ll T_c$. Учитывая относительность понятия "малости", данный критерий дает весьма размытую границу применимости метода. При этом существуют примеры, когда формулы и зависимости, полученные в предельном случае, дают верные результаты в случае, формально не удовлетворяющем рассматриваемому пределу. Ниже будут приведены примеры, когда формула для тока распаривания, полученная в пределе сверхтонких пластин с толщиной много меньше как длины когерентности ξ, так и глубины проникновения магнитного поля λ, дает

[1] Помимо ограничения на применение теории ГЛ вдали от T_c, существует ограничение на ее использование в непосредственной близости от T_c, связанное с флуктуациями.

результат, практически совпадающий с точным расчетом для пластин толщиной порядка ξ и λ. В этой связи в данной работе нами представлены расчеты и для случая температур, достаточно отдаленных от T_c.

Вернемся к вопросу о температурных зависимостях ξ и λ. Как правило, при расчетах в рамках теории ГЛ используются следующие температурные зависимости, применимые вблизи T_c:

$$\xi = \frac{\xi(0)}{\sqrt{1-\frac{T}{T_c}}},\ \lambda = \frac{\lambda(0)}{\sqrt{1-\frac{T}{T_c}}}, \tag{5}$$

где $\xi(0)$ и $\lambda(0)$ – длина когерентности и глубина проникновения магнитного поля при $T = 0$. Тем не менее, для глубины проникновения магнитного поля λ существует эмпирическая формула, описывающая поведение λ для всего температурного диапазона:

$$\lambda = \frac{\lambda(0)}{\sqrt{1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^4}}. \tag{6}$$

Для реальных сверхпроводящих структур (особенно ВТСП) температурные зависимости λ и ξ могут отличаться от описанных выше [11], а в ряде случаев и параметр ГЛ κ, считающийся в теории не зависящим от температуры, может изменяться при ее вариации [12–13]. В нашей работе мы используем температурные зависимости λ и ξ в виде (5).

Применялась следующая итерационная процедура нахождения самосогласованных решений системы уравнений (1), (2). Первоначально задавалась некоторая пробная функция параметра порядка $\psi(x_\xi)$ и находилось решение уравнения (2) для функции $U(x_\xi)$. Найденная $U(x_\xi)$ подставлялась затем в уравнение (1), и с учетом граничных условий (4) находилась новая функция $\psi(x_\xi)$. Далее вновь решалось уравнение (2), и вся процедура повторялась, пока функции $\psi(x_\xi)$ и $U(x_\xi)$ не переставали меняться и, таким образом, представляли собой самосогласованное решение системы уравнений. Найденное таким методом решение устойчиво, поскольку оно не меняется при малых первоначальных возмущениях. Значения плотности критического тока J_c и критического поля H_c сверхпроводящей пластины принимались равными значениям плотности транспортного тока J_t или внешнего поля H, при которых параметр порядка становился равным нулю, $\psi(x_\xi) = 0$. Таким методом находилась зависимость плотности критического тока J_c, а также зависимость критического поля H_c от температуры.

Отметим, что все приведенные выше значения длины (в том числе на графиках), представлены в единицах $\xi(0)$. Значения магнитного поля представлены в единицах

$H_{\xi 0}$, где $H_{\xi 0} = \dfrac{\phi_0}{2\pi\kappa^2\xi(0)^2}$. Значения тока (плотности критического тока) в рамках модели представляются через H_I (см. выше), и поэтому, также как и магнитное поле, представлены в единицах $H_{\xi 0}$.

Результаты численных расчетов. Примеры зависимостей плотности критического тока от температуры $J_c(T/T_{\rm cm})$ приведены на рис. 1. Здесь $T_{\rm cm}$ – критическая температура массивного образца, в котором границы оказывают малое влияние на его сверхпроводящие свойства. На рис. 1 приведены зависимости $J_c(T/T_{\rm cm})$, рассчитанные при следующих параметрах: $\kappa = 2$ (сверхпроводник второго рода); $\Lambda = 10$ и $\Lambda = \infty$; значения толщины сверхпроводящей пластины $d - 1, 2$ и 4. Из приведенного рис. 1 видно, что критическая температура пластин для $\Lambda = 10$ меньше, чем для $\Lambda = \infty$, а также то, что при каждой температуре значение плотности критического тока для случая $\Lambda = 10$ меньше плотности тока распаривания ГЛ. Стоит отметить, что при расчетах для пластин с $\Lambda = \infty$ плотность критического тока не зависит от толщины пластины и совпадает с плотностью тока распаривания ГЛ.

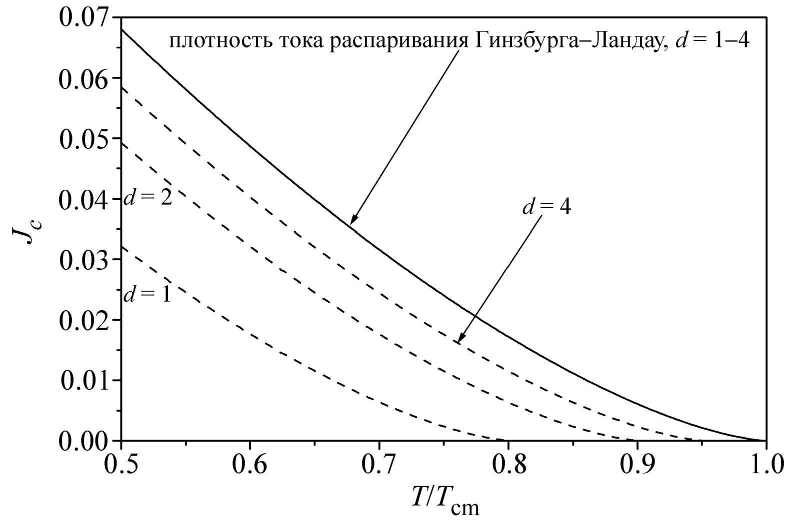

Рис. 1: *Зависимость плотности критического тока в единицах $H_{\xi 0}$ (см. текст) от отношения $T/T_{\rm cm}$ для сверхпроводящих пластин различной толщины с параметром границы $\Lambda = \infty$ (сплошная линия) и $\Lambda = 10$ (пунктирная линия). В этом случае $\kappa = 2$.*

Аналогичное влияние граничных условий наблюдается и для параллельного поверхности пластины критического магнитного поля. Примеры зависимостей $H_c(T/T_{\rm cm})$ приведены на рис. 2. Расчет произведен для случая $\kappa = 2$ (сверхпроводник второго рода). Представленный рис. 2 показывает уменьшение критической температуры пластины по отношению к критической температуре массивного образца T_{cm} для случая $\Lambda = 10$. При этом чем меньше толщина пластины, тем ее критическая температура ниже. Для каждого конкретного значения толщины пластины и каждого конкретного значения температуры критическое поле, рассчитанное при значении $\Lambda = 10$, меньше, чем рассчитанное при значении $\Lambda = \infty$.

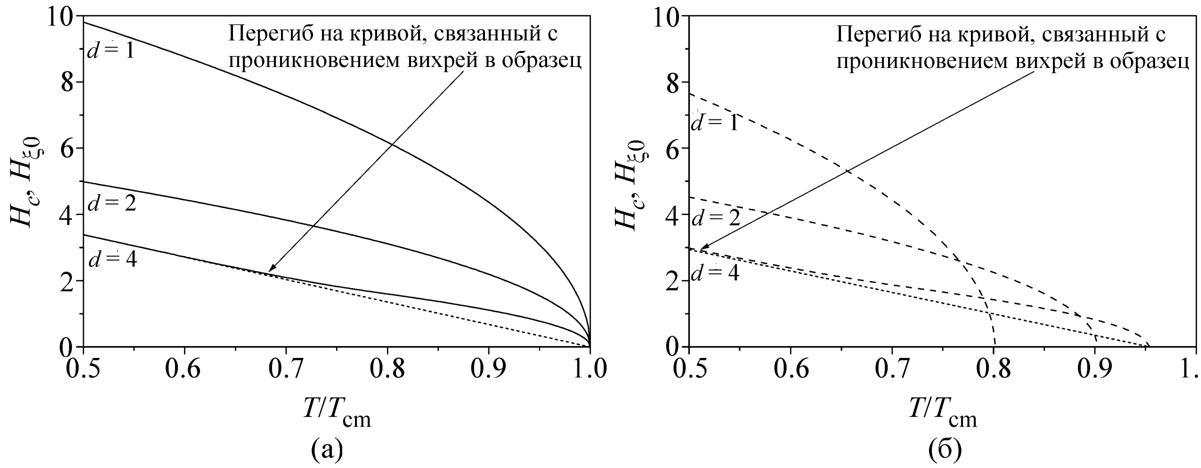

Рис. 2: *Зависимость параллельного поверхности пластины критического магнитного поля от отношения T/T_{cm} для сверхпроводящих пластин различной толщины с параметром границы $\Lambda = \infty$ (а) и $\Lambda = 10$ (б). В этом случае $\kappa = 2$.*

Таким образом, при учете влияния границы наблюдается подавление сверхпроводящего состояния в пластине, что оказывает влияние на ее критические параметры (критическую температуру, критическое поле и плотность критического тока). При этом чем пластина тоньше, тем подавление сверхпроводящего состояния сильнее. Подавление сверхпроводящего состояния в пленках при конечных значениях параметра границы Λ уже обсуждалось нами [6].

Остановимся на виде температурных зависимостей плотности критического тока и критического поля тонкой сверхпроводящей пластины. Из теории известно, что вблизи критической температуры данные зависимости ведут себя как $(T_c - T)^{3/2}$ и $(T_c - T)^{1/2}$ соответственно. Эти зависимости получены в предположении постоянства параметра порядка по толщине пластины. При конечных значениях Λ (в нашем случае $\Lambda = 10$), как показывают расчеты, вид температурной зависимости сохраняется. Здесь стоит отметить, что данный результат является не совсем тривиальным. Вид температурной зависимости задается температурными зависимостями глубины проникновения магнитного поля λ и длины когерентности ξ, а точнее, связан с тем, как данные длины расходятся вблизи T_c. В случае учета влияния границы (конечные значения Λ) критическая температура пластины уменьшается, а температурные зависимости параметров λ и ξ расходятся не вблизи критической температуры пластины, а вблизи критической температуры массивного сверхпроводника $T_{\rm cm}$. В работе [14] такой характер зависимостей $H_c(T)$ объясняется с помощью учета дополнительного поверхностного члена в функционале свободной энергии ГЛ, который и приводит к граничным условиям вида (4). В этой работе получено следующее соотношение в обычных размерных единицах для температурной зависимости параллельного поверхности пластины критического магнитного поля вблизи критической температуры:

$$H_c = \frac{\sqrt{3}\Phi_0}{\pi D}\left[\frac{1}{\xi^2(T)} - \frac{2}{\Lambda D}\right]^{0.5} = \frac{\sqrt{3}\Phi_0}{\pi D\xi(0)}\left[\frac{T_c - T}{T_{ci}}\right]^{0.5}, \tag{7}$$

где Φ_0 – квант магнитного потока. Формула получена в предположении, что толщина пластины много меньше глубины проникновения магнитного поля λ и длины когерентности ξ. Наши численные расчеты показывают, что такой корневой характер зависимости $H_c(T)$ сохраняется в широком диапазоне температур и толщин пленок.

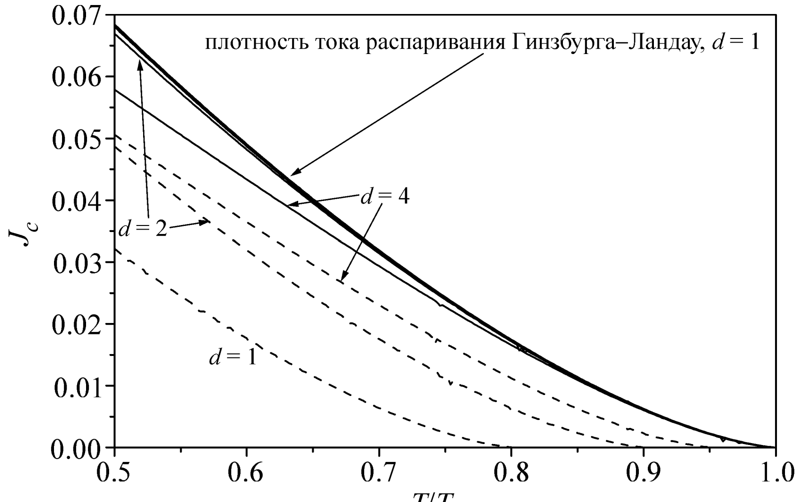

Рис. 3: *Зависимость плотности критического тока от отношения $T/T_{\rm cm}$ для сверхпроводящих пластин различной толщины с параметром границы $\Lambda = \infty$ (сплошная линия) и $\Lambda = 10$ (пунктирная линия). В этом случае $\kappa = 0.5$.*

Для пластин толщиной 4 отчетливо видно наличие перегиба на кривой температурной зависимости критического поля. Данный перегиб представляет собой переход от линейной зависимости при низких температурах к корневой вблизи T_c. Линейная

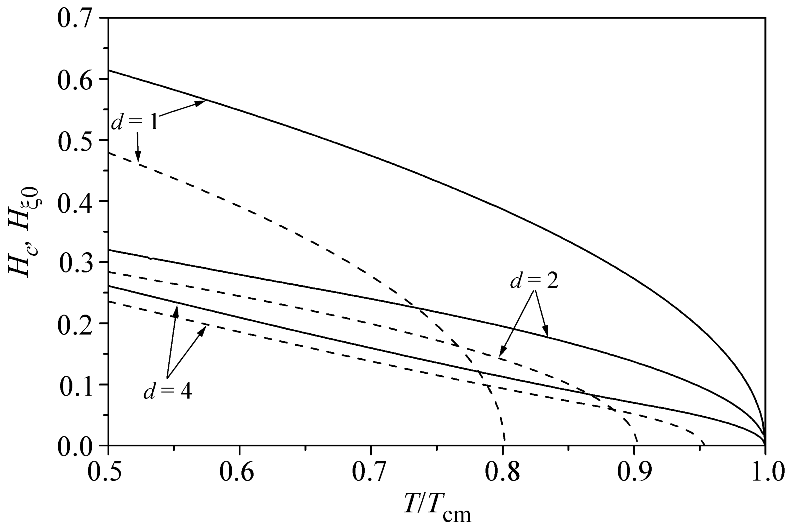

Рис. 4: *Зависимость параллельного поверхности пластины критического поля от отношения $T/T_{\rm cm}$ для сверхпроводящих пластин различной толщины с параметром границы $\Lambda = \infty$ (сплошная линия) и $\Lambda = 10$ (пунктирная линия). В этом случае $\kappa = 0.5$.*

зависимость продолжена на рис. 2 пунктирной линией. Данный перегиб наблюдается как при $\Lambda = \infty$, так и в случае конечных Λ. Его наличие связано с тем, что, начиная с некоторого значения температуры, толщина пластины в единицах ξ становится меньше диаметра кора вихря (1.81 для $\Lambda = \infty$ и более 1.81 при конечных Λ) и вихри перестают проникать в пластину, таким образом, в ней реализуется мейснеровское состояние. При этом температурная зависимость критического поля ведет себя по корневому закону, как и положено для этого состояния. Учитывая, что для точки перегиба отношение толщины пластины к длине когерентности при данной температуре равно определенному значению порядка 2–3, анализ таких зависимостей для пленок из произвольных сверхпроводников может позволить оценить длину когерентности ξ для таких пленок. Отметим, что наличие на реальных пленках особенности, связываемой с проникновением вихрей в образец для случая параллельного поверхности магнитного поля, наблюдалось экспериментально [15].

Температурные зависимости плотности критического тока и критического поля были получены и для сверхпроводника первого рода (рис. 3 и 4). Здесь, как и для сверхпроводников второго рода, наблюдается описанное выше подавление сверхпроводящего состояния при учете влияния границы, выраженное в уменьшении критических температуры, плотности тока и поля. Отличием данного случая является то, что плотность критического тока, полученная для случая $\Lambda = \infty$ и пластин толщиной более 1, отличается от тока распаривания ГЛ при понижении температуры. Данное обстоятельство связано с тем, как упоминалось выше, что аналитическая формула для тока распаривания ГЛ получена для случая, когда толщина пластины много меньше глубины проникновения магнитного поля λ и длины когерентности ξ, и, следовательно, может быть неприменима для толщин порядка λ и ξ [16].

Заключение. Основные результаты данной работы можно сформулировать следующим образом:

– подтверждено подавление сверхпроводящего состояния в пластине при учете влияния границы на ее сверхпроводящее состояние;

– вид температурных зависимостей плотности критического тока и критического магнитного поля сохраняется при использовании обобщенных граничных условий, в том числе с конечными значениями Λ;

– для случая сверхпроводника второго рода и пластин толщиной более 1.81 наблюдается перегиб на расчетной кривой температурной зависимости критического поля, параллельного поверхности пластины. Данный перегиб связывают с началом проникновения вихрей в пластину. Такая особенность наблюдается на эксперименте и может быть использована для оценки длины когерентности ξ образца.

ЛИТЕРАТУРА

[1] G. F. Zharkov, V. G. Zharkov, and A. Yu. Tsvetkov, Phys. Rev. B **61**, 12293 (2000).

[2] Г. Ф. Жарков, В. Г. Жарков, А. Ю. Цветков, Краткие сообщения по физике ФИАН, № 11, 35 (2001).

[3] Г. Ф. Жарков, В. Г. Жарков, А. Ю. Цветков, Краткие сообщения по физике ФИАН, № 12, 31 (2001).

[4] А. Ю. Цветков, Г. Ф. Жарков, В. Г. Жарков, Краткие сообщения по физике ФИАН, № 2, 42 (2002).

[5] А. Н Лыков, А. Ю. Цветков, Г. Ф. Жарков, ЖЭТФ **128**, 392 (2005).

[6] П. И. Безотосный, С. Ю. Гаврилкин, А. Н. Лыков, А. Ю. Цветков, Краткие сообщения по физике ФИАН **41**(6), 8 (2014).

[7] Е. А. Андрюшин, В. Л. Гинзбург, А. П. Силин, УФН **163**, 105 (1993).

[8] A. Lykov, Phys. Lett. A **372**, 4747 (2008).

[9] A. Lykov, Int. J. Mod. Phys. B **23**, 4269 (2009).

[10] M. Tinkham, *Introduction to superconductivity* (McGraw-Hill Book Company, 1975), p. 149-151.

[11] Sreeparna Mitra, J. H. Cho, W. C. Lee, et al., Phys. Rev. B **40**, 4 (1989).

[12] N. Sluchanko, S. Gavrilkin, K. Mitsen, et al., J. Supercond. Nov. Magn. **26**, 1663 (2013).

[13] K. Flachbart, S. Gabani, K. Gloos, et al., J. Low Temp. Phys. **140**, 339 (2005).

[14] J. Simonin, Phys. Rev. B **33**, 7830 (1986).

[15] Н. П. Шабанова, С. И. Красносвободцев, А. В. Варлашкин, А. И. Головашкин, ФТТ **49**, 990 (2007).

[16] А. Ю. Цветков, Г. Ф. Жарков, А. Н. Лыков, Краткие сообщения по физике ФИАН, № 6, 25 (2004).

Поступила в редакцию 23 апреля 2014 г.