УДК 51-73;535.14

СКОЛЬКО ВЕСИТ ФУНТ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

А. И. Никишов

Обычно сила определяется как производная от импульса частицы по собственному времени. Работа такой силы при медленном перемещении частицы в постоянном гравитационном поле не согласуется с законом сохранения энергии. Согласие имеет место только если сила определяется как производная от импульса по мировому времени. Мы считаем, что именно эту силу измеряют пружинные весы, удерживающие частицу в покое в постоянном гравитационном поле.

Ключевые слова: сила в уравнении движения пробной частицы.

Существует несколько способов введения силы в уравнение движения пробной частицы. Так Мёллер исследует три различных 3-вектора силы "чтобы описать все аспекты негравитационного действия", см. §10.4 в [1]. Ландау и Лифшиц определяют гравитационную силу как производную от трехмерного импульса по (синхронизованному) собственному времени, причём производная даётся с помощью трёхмерного ковариантного дифференцирования (см. Задачу 1 в §88 в [2]).

Оказывается, что уравнение с силой, согласованной с законом сохранения энергии в постоянном гравитационном поле, не имеет общековариантного вида, но домножение общековариантного уравнения на ds/dt приводит к уравнению с желаемой силой. Другими словами, изменение импульса должно даваться производной по координатному (мировому, а не по собственному) времени. Операционное определение мирового времени смотри в §10.3 в [1].

В постоянном гравитационном поле сохраняется p_0 компонента импульса (см. §88 в [2])

$$p_0 = \frac{mc^2\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad v^\alpha = \frac{cdx^\alpha}{\sqrt{g_{00}}(dx^0 - g_\alpha dx^\alpha)}, \quad g_\alpha = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}, \quad v^2 = \gamma_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta. \tag{1}$$

ФИАН, 119991 Россия, Москва, Ленинский пр-т, 53; e-mail: nikishov@lpi.ru.

Для покоящейся частицы

$$p_0 = mc^2\sqrt{g_{00}}, \quad dp_0 = \frac{mc^2}{2\sqrt{g_{00}}} g_{00,\alpha} dx^\alpha \quad \left(g_{00,\alpha} = \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}\right). \tag{2}$$

Следовательно, координатная негравитационная сила, которая удерживает частицу в покое или адиабатически (то есть бесконечно медленно) изменяет p_0, равна

$$\overset{n.g.}{F}_\alpha = \frac{dp_0}{dx^\alpha} = \frac{mc^2}{2\sqrt{g_{00}}} g_{00,\alpha}. \tag{3}$$

При преобразовании только пространственных координат F_α есть 3-вектор, а dp_0 – инвариант и его можно интегрировать (см. (10.116) в [1]). Теперь предположим, что в рассматриваемой области пространства гравитационная сила направлена против оси 1. Тогда в (2) только dx^1 отлично от нуля:

$$dp_0 = \frac{mc^2}{2\sqrt{g_{00}}} g_{00,1} dx^1 = \frac{mc^2}{2} \frac{g_{00,1}}{\sqrt{g_{00}|g_{11}|}} dl^1, \quad dl^1 = \sqrt{|g_{11}|} dx^1. \tag{4}$$

В низшем приближении $g_{00} = 1 + \dfrac{2\phi}{c^2}$, $\phi < 0$, $\phi_{,1} > 0$. Следовательно $\overset{n.g.}{F}_1$ направлена по оси 1. Из (4) заключаем, что пружинные весы, удерживающие частицу в покое, должны измерять 3-инвариантную силу:

$$F = \frac{mc^2 g_{00,1}}{2\sqrt{g_{00}|g_{11}|}}. \tag{5}$$

Согласно эвристическому подходу к гравитации [3, 4] следует ожидать, что метрика постоянного гравитационного поля имеет локально-изотропный вид

$$ds^2 = g_{00}(x^1, x^2, x^3)(dx^0)^2 + g_s(x^1, x^2, x^3)[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2]. \tag{6}$$

В этом подходе гравитация изменяет не только интервалы времени и длины, но и физические константы, такие как заряд, масса и другие, см. также [5]. Нас здесь интересует изменение в сильном гравитационном поле эйнштейновской гравитационной постоянной $\varkappa$:

$$\varkappa = \frac{8\pi G}{c^4} \to \varkappa_\phi = \frac{\varkappa}{\sqrt{g_{00}|g_s|}}, \tag{7}$$

где G – гравитационная постоянная Ньютона.

Изменение $\varkappa$ зависит от размерности величины. В частности, безразмерный потенциал $\phi = -\dfrac{mG}{c^2 r}$ не изменяется. Изменение $\varkappa$ (и ньютоновской гравитационной постоянной $G = \dfrac{c^4\varkappa}{8\pi}$) не совместимо с уравнениями Эйнштейна, но для качественной оценки поведения $\varkappa$ воспользуемся изотропной метрикой решения Шварцшильда. Тогда

$$g_{00} = \left(\frac{1+\phi/2}{1-\phi/2}\right)^2, \quad g_s = -\left(1-\phi/2\right)^4, \quad \sqrt{|g_s| g_{00}} = 1 - \frac{1}{4}\phi^2. \tag{8}$$

Из последнего равенства видно, что $\varkappa_\phi$ в (7) при $\phi^2 = 4$ меняет знак, проходя через бесконечность, т.е. гравитация становится антигравитацией. Последнее как раз и нужно для объяснения ускоренного расширения Вселенной. С другой стороны, увеличение $\varkappa$ (и G) едва ли может заменить чёрную материю, поскольку она играет существенную роль, когда всё ещё $|\phi| << 1$.

Теперь заметим, что согласно уравнению (2.2.6) в [6], когда скорость частицы $v^\alpha = 0$, гравитационная сила равна

$$K = m\sqrt{\gamma_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta}, \quad a^\alpha = \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{9}$$

В метрике (6), по-прежнему считая, что сила действует по оси 1 и частица почти покоится, имеем

$$a^1 = \frac{d^2 x^1}{ds^2} = -\Gamma^1_{00}\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 = -\frac{g^{11} g_{00,1}}{2g_{00}} = -\frac{g_{00,1}}{2g_{11}g_{00}}, \quad \left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 = \frac{1}{g_{00}}.$$

Следовательно

$$K = \frac{mc^2}{2}\frac{g_{00,1}}{\sqrt{g_{00}|g_{11}|}}\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}. \tag{10}$$

Эта сила отличается от (5) фактором $\dfrac{1}{\sqrt{g_{00}}}$. Противоречие с (5) исчезнет, если производная от импульса, определяющая силу, берется по координатному времени, а не по собственному.

Такая производная естественно возникает в лагранжевом формализме (см. §10.4 в [1]). Действительно, используя как в [1] $\tilde{g}_{ik} = -g_{ik}$, имеем

$$L = -mc(-\tilde{g}_{ik}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt})^{1/2}.$$

Отсюда получим

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \tilde{u}^\alpha} = \frac{mc\tilde{g}_{\alpha l}\tilde{u}^l}{\sqrt{-\tilde{g}_{ik}\tilde{u}^i\tilde{u}^k}}, \quad \tilde{u}^k = \frac{dx^k}{dt}, \quad \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = \frac{mc\tilde{g}_{lm,\alpha}\tilde{u}^l\tilde{u}^m}{2\sqrt{-\tilde{g}_{ik}\tilde{u}^i\tilde{u}^k}}.$$

Тогда уравнения Эйлера–Лагранжа дают

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = \frac{mc\tilde{g}_{lm,\alpha}\tilde{u}^l\tilde{u}^m}{2\sqrt{-\tilde{g}_{ik}\tilde{u}^i\tilde{u}^k}} = \overset{g.}{F}_\alpha\ . \tag{11}$$

Для покоящейся частицы $\tilde{u}^i = c\delta_0^i$ и $\overset{g.}{F}$ согласуется с (3). Для медленно движущейся частицы $\overset{g.}{F}_\alpha \approx - \overset{n.g.}{F}_\alpha$.

Используя соотношения

$$\tilde{u}^k = u^k \frac{ds}{dt}, \quad u^k = \frac{dx^k}{ds}, \quad -\tilde{g}_{ik}\tilde{u}^i\tilde{u}^k = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \tag{12}$$

гравитационную силу $\overset{g.}{F}_\alpha$ можно записать в виде

$$\overset{g.}{F}_\alpha = -\frac{mc}{2}\tilde{g}_{lm,\alpha}u^l\frac{dx^m}{dt}; \quad \tilde{g}_{ik} = -g_{ik}. \qquad (13).$$

Это наводит на мысль сразу использовать для получения (13) уравнение геодезической в ковариантной форме (см. уравнение (87.3а) в [2]):

$$\frac{du_i}{ds} = \frac{1}{2}g_{kl,i}u^k u^l. \tag{14}$$

Для $i = 0$ отсюда следует сохранение p_0 в согласии с (1), поскольку $g_{kl,0} = 0$ в постоянном поле. Для $i = 1, 2, 3$, учитывая что $\tilde{g}_{ik} = -g_{ik}$, получим в правой части (14) силу (13) (после домножения на $mc\frac{ds}{dt}$, что соответствует переходу от дифференцирования по s к дифференцированию по t). Напомним, что знак p_i зависит от знака сигнатуры метрики: $p_i = g_{ik}p^k$.

Заметим, что g_{00} в каждой точке можно определить по красному смещению. Другой способ см. в [1] и [6]. Таким образом, можно считать, что g_{00} и, следовательно, её производная $g_{00,1}$, известны из эксперимента. Тогда измерение весами силы в (5) позволяет определить g_{11}, фигурирующую в этой формуле. Напомним, что все компоненты метрики в принципе измеримы (см. [1] и [6]) и даже не единственным способом.

Теперь остановимся кратко на Задаче 1 в §88 в [2]. Во втором издании книги [2] (Москва, 1948) рассмотрен случай малых скоростей и получена сила

$$f_\alpha = \frac{dp_\alpha}{d\tau} = mc^2\left[-\frac{1}{2}\frac{g_{00,\alpha}}{g_{00}} + \sqrt{g_{00}}(g_{\beta,\alpha} - g_{\alpha,\beta})\frac{v^\beta}{c}\right], \quad g_\alpha = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}. \tag{15}$$

Переходя от дифференцирования по τ к дифференцированию по t, т.е. домножая (15) на $\sqrt{g_{00}}$, получим

$$\sqrt{g_{00}}f_\alpha = \overset{g.}{F}_\alpha = mc^2\left[-\frac{1}{2}\frac{g_{00,\alpha}}{\sqrt{g_{00}}} + g_{00}(g_{\beta,\alpha} - g_{\alpha,\beta})\frac{v^\beta}{c}\right]. \tag{16}$$

Для покоящейся частицы это согласуется с (3), где приведена негравитационная сила, уравновешивающая гравитационную.

Заметим, что сами по себе принцип эквивалентности и требование общей ковариантности не указывают на необходимость перехода от дифференцирования по собственному времени к дифференцированию по координатному времени в уравнении движения пробной частицы, на которую действует и негравитационная сила.

Я благодарю В. И. Ритуса и М. И. Зельникова за стимулирующие обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] C. Möller, *The Theory of Relativity* (Clarendon Press, Oxford, 1972).

[2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля* (Москва, Наука, 1973).

[3] H. Dehnen, H. Hönl, and K. Westpfahl, Ann. der Phys. **6**, 7 Folge, Band 6, Heft 7-8, 670 (1960).

[4] A. I. Nikishov, *Atoms as Rods and Clocks in Gravitational Field*, Proceedings of the 14th Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics of the Year of Astronomy, Moscow, 2011), (World Scientific, Singapore, 2011), p. 266.

[5] W. E. Thirring, Ann. Phys. (N.Y.), **16**, 96 (1961).

[6] И. Д. Новиков, В. П. Фролов, *Физика чёрных дыр* (Москва, Наука, 1986).

[7] C. Möller, *Measurements in General Relativity and the Principle of Relativity.* В сб.: “Актуальные проблемы теоретической физики” (Изд-во Московского университета, 1976).

Поступила в редакцию 14 апреля 2014 г.