УДК 514.822

О ПРОЕКТИВНОМ ДВИЖЕНИИ В 6-МЕРНОМ ПСЕВДОРИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА[1]

З. Х. Закирова[2]

В этой заметке мы продолжаем изучение 6-мерного псевдориманового пространства $V^6(g_{ij})$ с сигнатурой $[++----]$, которое допускает проективные движения, т.е. непрерывные группы преобразований, сохраняющих геодезические. Мы находим общую определяющую функцию проективного движения в 6-мерном псевдоримановом пространстве специального типа.

Ключевые слова: общая теория относительности, псевдоримановы пространства, уравнения Эйзенхарта.

Введение. Начиная с ранних работ по теории Калуцы–Клейна, имеется устойчивый интерес к многомерным теориям пространства с нестандартными сигнатурами метрики. В настоящее время он в основном ассоциирован с теорией струн, где временное(ые) направление(ия) в пространстве-времени связано(ы) с нестандартным знаком кинетического члена в действии лиувиллевского(их) поля(ей). Поэтому изучение таких теорий привлекает много внимания.

В серии работ [1–8] мы изучали 6-мерные псевдоримановы пространства $V^6(g_{ij})$ с сигнатурой $[++----]$, которые допускают проективные движения, то есть непрерывные группы преобразований, сохраняющие геодезические.

Напомним, что линия $x^i(t)$ называется *геодезической*, если ее касательные вектора $T^i = dx^i/dt$ остаются параллельными при переносе вдоль этой линии [9]: $\nabla_t T = 0$. Уравнение геодезических в локальных координатах имеет вид

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + G^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0, \tag{1}$$

где G^i_{jk} – компоненты связности псевдориманова многообразия (M, g).

[1] Печатается по представлению Отделения теоретической физики ФИАН.

[2] Казанский государственный энергетический университет, e-mail: zolya_zakirova@mail.ru.

Векторное поле X является инфинитезимальным проективным преобразованием на многообразии M с аффинной связностью ∇ тогда и только тогда, когда [10]

$$\nabla_Y(L_X - \nabla_X) = R(X,Y) - \varphi(Y)id - Y\varphi, \tag{2}$$

для поля 1-формы φ и всех векторных полей Y на M, где R – тензор кривизны, L_X – производная Ли вдоль векторного поля X.

В локальных координатах:

$$L_X G^i_{jk} = \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j \tag{3}$$

или

$$\xi^i_{,jk} + \xi^l R^i_{jlk} = \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j, \tag{4}$$

где ξ^i, G^i_{jk}, R^i_{jlk} – компоненты соответственно векторного поля X, связности ∇ и тензорного поля кривизны в координатном репере ∂_i, а запятая означает ковариантное дифференцирование относительно g. Если M является псевдоримановым многообразием с метрикой g и римановой связностью ∇, тогда условие (2) можно записать в виде двух уравнений [10]

$$L_X g = h, \qquad \textit{обобщенное уравнение Киллинга,} \tag{5}$$

$$\nabla h(Y,Z,W) = 2g(Y,Z)W\varphi + g(Y,W)Z\varphi + g(Z,W)Y\varphi, \tag{6}$$

уравнение Эйзенхарта,

где $(Y,Z,W) \in T(M)$, $\varphi = \frac{1}{n+1}\mathrm{div}X$.

Общий метод определения псевдоримановых многообразий, которые допускают негомотетичную проективную группу G_r, был развит А. В. Аминовой [11]. А. В. Аминова классифицировала все лоренцевы многообразия размерности ≥ 3, которые допускают негомотетичные проективные или аффинные инфинитезимальные преобразования. В каждом случае были определены соответствующие максимальные проективные и аффинные алгебры Ли. Эта проблема не решена для псевдоримановых пространств с произвольной сигнатурой.

Для того чтобы найти псевдориманово пространство, допускающее негомотетичное инфинитезимальное проективное преобразование, нужно проинтегрировать уравнение Эйзенхарта (6). Проблема определения таких пространств зависит от типа h-пространства, то есть от типа билинейной формы $L_X g$, определенной характеристикой

λ-матрицы $(h - \lambda g)$. Если характеристика Сегре тензора $L_X g$ – $[abc...]$, мы называем соответствующее h-пространство пространством типа $[abc...]$. Эти идеи впервые были обоснованы П. А. Широковым [12]. Таким образом, псевдоримановы многообразия, для которых существуют нетривиальные решения $h \neq cg$ уравнения Эйзенхарта, называются *h-пространствами.*

В работах [1–6] мы нашли 6-мерные h-пространства типов [2211], [321], [33], [411] и [51]:

Метрика h-пространства типа [2211]

$$g_{ij}dx^i dx^j = e_2(f_4 - f_2)^2 \Pi_\sigma (f_\sigma - f_2)\{2A dx^1 dx^2 - A^2 \Sigma_1 (dx^2)^2\}+$$

$$e_4(f_2 - f_4)^2 \Pi_\sigma (f_\sigma - f_4)\{2\tilde{A} dx^3 dx^4 - \tilde{A}^2 \Sigma_2 (dx^4)^2\} + \sum_\sigma e_\sigma \Pi'_i (f_i - f_\sigma)(dx^\sigma)^2, \qquad (7)$$

где

$$A = \epsilon x^1 + \theta(x^2), \quad \tilde{A} = \tilde{\epsilon} x^3 + \omega(x^4),$$

$$\Sigma_1 = 2(f_4 - f_2)^{-1} + \sum_\sigma (f_\sigma - f_2)^{-1}, \quad \Sigma_2 = 2(f_2 - f_4)^{-1} + \sum_\sigma (f_\sigma - f_4)^{-1}, \qquad (8)$$

$e_i = \pm 1$, $\sigma = 5, 6$, $f_1 = f_2 = \epsilon x^2$, $f_3 = f_4 = \tilde{\epsilon} x^4 + a$, $\epsilon, \tilde{\epsilon} = 0, 1$, $\epsilon \neq \tilde{\epsilon}$, a – постоянная, ненулевая, когда $\tilde{\epsilon} = 0$, $f_\sigma(x^\sigma)$, $\theta(x^2)$, $\omega(x^4)$ – произвольные функции, $\sum_\sigma$ здесь и далее означает суммирование по σ, $\Pi'_i(f_i - f_\sigma)$ здесь и далее означает произведение множителей $(f_i - f_\sigma)$ для всех $i = 1, \ldots, 6$, кроме $i = \sigma$.

Метрика h-пространства типа [321]

$$g_{ij}dx^i dx^j = e_3(f_5 - \epsilon x^3)^2 (f_6 - \epsilon x^3)\{(dx^2)^2 + 4A dx^1 dx^3 + \qquad (9)$$

$$2(\epsilon x^1 - 2A\Sigma_1) dx^2 dx^3 + ((\epsilon x^1)^2 - 4\epsilon x^1 A \Sigma_1 + 4A^2 \Sigma_3)(dx^3)^2\}+$$

$$e_5(\epsilon x^3 - f_5)^3 (f_6 - f_5)\{2\tilde{A} dx^4 dx^5 - \Sigma_4 \tilde{A}^2 (dx^5)^2\} + e_6 (f_5 - f_6)^2 (f_5 - f_6)^3 (dx^6)^2,$$

где

$$A = \epsilon x^2 + \theta(x^3), \quad \tilde{A} = \tilde{\epsilon} x^4 + \omega(x^5), \qquad (10)$$

$$\Sigma_1 = (f_6 - \epsilon x^3)^{-1} + 2(f_5 - \epsilon x^3)^{-1}, \quad \Sigma_2 = (f_6 - \epsilon x^3)^{-2} + 2(f_5 - \epsilon x^3)^{-2},$$

$$2\Sigma_3 = (\Sigma_1)^2 - \Sigma_2, \quad \Sigma_4 = 3(\epsilon x^3 - f_5)^{-1} + (f_6 - f_5)^{-1},$$

$e_3, e_5, e_6 = \pm 1$, $f_1 = f_2 = f_3 = \epsilon x^3$, $f_4 = f_5 = \tilde{\epsilon} x^5 + a$, $\theta(x^3)$, $\omega(x^5)$, $f_6(x^6)$ – произвольные функции, $\epsilon, \tilde{\epsilon} = 0, 1$, $\epsilon \neq \tilde{\epsilon}$, a – константа, ненулевая, когда $\tilde{\epsilon} = 0$.

Метрика h-пространства типа [33]

$$g_{ij}dx^i dx^j = e_3(f_6 - f_3)^3\{(dx^2)^2 + 4Adx^1dx^3 + \tag{11}$$

$$2(\epsilon x^1 - 2A\Sigma_1)dx^2dx^3 + ((\epsilon x^1)^2 - 4\epsilon x^1 A\Sigma_1 + 4A^2\Sigma_2)(dx^3)^2\} +$$

$$e_6(f_3 - f_6)^3\{(dx^5)^2 + 4\tilde{A}dx^4dx^6 + 2(\tilde{\epsilon}x^4 + 2\tilde{A}\Sigma_1)dx^5dx^6 + ((\tilde{\epsilon}x^4)^2 + 4\tilde{\epsilon}x^4\tilde{A}\Sigma_1 + 4\tilde{A}^2\Sigma_2((dx^6)^2\},$$

где

$$A = \epsilon x^2 + \theta(x^3), \quad \tilde{A} = \tilde{\epsilon}x^4 + \omega(x^6), \tag{12}$$

$$\Sigma_1 = 3(f_6 - f_3)^{-1}, \quad \Sigma_2 = 3(f_6 - f_3)^{-2},$$

$e_3, e_6 = \pm 1$, $f_1 = f_2 = f_3 = \epsilon x^3$, $f_4 = f_5 = f_6 = \tilde{\epsilon}x^6 + a$, $\epsilon, \tilde{\epsilon} = 0, 1$, $\epsilon \neq \tilde{\epsilon}$, a – константа, ненулевая, когда $\tilde{\epsilon} = 0$, $\theta(x^3)$, $\omega(x^6)$ – произвольные функции.

Метрика h-пространства типа [411]

$$g_{ij}dx^i dx^j = e_4\Pi_\sigma(f_\sigma - \epsilon x^4)\{6Adx^1dx^4 + 2dx^2dx^3 + 2(2\epsilon x^2 - 3A\Sigma_1)dx^2dx^4 - \tag{13}$$

$$\Sigma_1(dx^3)^2 + 2(\epsilon x^1 - 2\epsilon x^2\Sigma_1)dx^3dx^4 + 4((\epsilon x^2)^2\Sigma_1 + \epsilon^2 x^1 x^2 - \frac{3}{2}\epsilon x^1 A\Sigma_1)(dx^4)^2\} +$$

$$3Adx^3dx^4 + 12\epsilon x^2 A(dx^4)^2 + \sum_\sigma e_\sigma \Pi'_i(f_i - f_\sigma)(dx^\sigma)^2,$$

где

$$A = \epsilon x^3 + \theta(x^4), \quad \Sigma_1 = (f_5 - \epsilon x^4)^{-1} + (f_6 - \epsilon x^4)^{-1}, \tag{14}$$

$e_4, e_5, e_6 = \pm 1$, $\sigma = 5, 6$, $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = \epsilon x^4$, $f_5(x^5)$, $f_6(x^6)$, $\theta(x^4)$ – произвольные функции, $\epsilon = 0, 1$.

Метрика h-пространства типа [51]

$$g_{ij}dx^i dx^j = e_5(f_6 - \epsilon x^5)\{8Adx^1dx^5 + 2dx^2dx^4 + \tag{15}$$

$$2(3\epsilon x^3 - 4A\Sigma_1)dx^2dx^5 + (dx^3)^2 - 2\Sigma_1 dx^3dx^4 + 2(2\epsilon x^2 - 3\epsilon x^3\Sigma_1)dx^3dx^5 +$$

$$2(\epsilon x^1 - 2\epsilon x^2\Sigma_1)dx^4dx^5 + 4(3/2\epsilon x^1\epsilon x^3 + (\epsilon x^2)^2 - 2\epsilon x^1 A\Sigma_1 -$$

$$3\epsilon x^2\epsilon x^3\Sigma_1)(dx^5)^2\} + e_6(\epsilon x^5 - f_6)^5(dx^6)^2,$$

где

$$A = \epsilon x^4 + \theta(x^5), \quad \Sigma_1 = (f_6 - \epsilon x^5)^{-1}, \tag{16}$$

$e_5, e_6 = \pm 1$, $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = \epsilon x^5$, $\theta(x^5)$, $f_6(x^6)$ – произвольные функции, $\epsilon = 0, 1$.

Определяющей функцией проективного движения в 6-мерных h-пространствах является

$$\varphi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} f_i. \tag{17}$$

В статье [6] мы определили условия постоянной кривизны 6-мерных h-пространств: для h-пространства типа [2211]:

$$\rho_p - \rho_{\sigma p} = \rho_p - \rho_{pq} = \epsilon = \tilde{\epsilon} = 0 \quad (p \neq q, p, q = 2, 4, \sigma = 5, 6), \tag{18}$$

для h-пространства типа [321]:

$$f'_6 = \epsilon = \tilde{\epsilon} = 0, \tag{19}$$

для h-пространства типа [33]:

$$\epsilon = \tilde{\epsilon} = 0, \tag{20}$$

для h-пространства типа [411]:

$$\rho_p - \rho_{\sigma p} = \epsilon = \gamma_1 = \gamma_2 = 0 \quad (\sigma = 5, 6, p = 4), \tag{21}$$

для h-пространства типа [51]:

$$f'_6 = \epsilon = 0, \tag{22}$$

где ρ_p, $\rho_{\sigma p}$, ρ_{pq}, γ_1 и γ_2 определены формулами

$$\rho_p = -\frac{1}{4}\sum_{\sigma}\frac{(f'_\sigma)^2}{(f_\sigma - f_p)^2 g_{\sigma\sigma}}, \quad \rho_{pq} = -\frac{1}{4}\sum_{\sigma}\frac{(f'_\sigma)^2}{(f_\sigma - f_p)(f_\sigma - f_q) g_{\sigma\sigma}}, \tag{23}$$

$$\rho_{\sigma p} = -\frac{1}{4}\frac{(f'_\sigma)^2}{(f_\sigma - f_p) g_{\sigma\sigma}}\left\{\frac{2f''_\sigma}{(f'_\sigma)^2} - \frac{1}{f_\sigma - f_p} + \sum_{i, i\neq\sigma}(f_i - f_\sigma)^{-1}\right\}$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{\gamma,\gamma\neq\sigma}\frac{(f'_\gamma)^2}{(f_\gamma - f_p)(f_\gamma - f_\sigma) g_{\gamma\gamma}}.$$

$$\gamma_1 = -\frac{1}{4}\sum_{\sigma}\frac{(f'_\sigma)^2}{(f_\sigma - f_4)^3 g_{\sigma\sigma}}, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{4}\sum_{\sigma}\frac{(f'_\sigma)^2}{(f_\sigma - f_4)^4 g_{\sigma\sigma}}. \tag{24}$$

Результаты, полученные в работах [1–6], необходимы для исследования свойств определяющей функции проективного движения в 6-мерных h-пространствах типов [2211], [321], [33], [411] и [51].

Общая определяющая функция проективного движения в 6-мерных h-пространствах типов [2211], [321], [33], [411] и [51]. Здесь мы доказываем следующую теорему, которая явно дает любую определяющую функцию проективного движения.

Теорема. *Любая определяющая функция проективного движения в h-пространствах типов [2211], [321], [33], [411] и [51] непостоянной кривизны может быть представлена как $\phi = a_1\varphi$, где a_1 – постоянная, функция φ определена в формуле* (17).

Доказательство. Пусть дано векторное поле ξ^i, которое задает проективное движение с определяющей функцией ϕ в h-пространстве. Тогда для тензора $b_{ij} = L_\xi g_{ij}$ выполняются следующие уравнения Эйзенхарта [10]

$$b_{ij,k} = 2g_{ij}\phi_{,k} + g_{ik}\phi_{,j} + g_{jk}\phi_{,i}, \tag{25}$$

где запятая означает ковариантное дифференцирование относительно g.

Условия их интегрируемости –

$$b_{mi}R^m_{jkl} + b_{mj}R^m_{ikl} = g_{ik}\phi_{,jl} + g_{jk}\phi_{,il} - g_{li}\phi_{,jk} - g_{lj}\phi_{,ik}. \tag{26}$$

Покажем, что для любого проективного движения в h-пространствах удовлетворяются следующие условия:

$$b_{\alpha\beta} = 0, \quad \phi_{,\alpha\beta} = 0, \tag{27}$$

где α, β – индексы зануляющихся компонент метрики $g_{\alpha\beta}$ h-пространств типов [2211], [321], [33], [411] и [51].

Для h-пространств типа [2211] это множество $(ijkl)$=(3112), (3314), $(3\sigma1\sigma)$, (1334), (1132), $(1\sigma3\sigma)$. Из (26) находим

$$b_{13}R^1_{112} = -g_{12}\phi_{,13}, \quad b_{13}R^1_{314} = -g_{34}\phi_{,13}, \quad b_{13}R^1_{\sigma1\sigma} = -g_{\sigma\sigma}\phi_{,13}, \tag{28}$$

$$b_{13}R^3_{334} = -g_{34}\phi_{,13}, \quad b_{13}R^3_{132} = -g_{12}\phi_{,13}, \quad b_{13}R^3_{\sigma3\sigma} = -g_{\sigma\sigma}\phi_{,13}. \tag{29}$$

Из (28) следует, что

$$b_{13}(\chi_2 - \rho_{24}) = b_{13}(\chi_2 - \rho_{\sigma2}) = 0$$

и из (29)

$$b_{13}(\chi_4 - \rho_{24}) = b_{13}(\chi_4 - \rho_{\sigma4}) = 0,$$

где

$$\chi_2 = \frac{\epsilon\theta'(x_2)}{A^2 g_{12}} + \rho_2, \quad \chi_4 = \frac{\tilde{\epsilon}\omega'(x_4)}{\tilde{A}^2 g_{34}} + \rho_4.$$

Здесь штрих означает производную по указанной переменной.

Если $b_{13} \neq 0$, тогда $\chi_p - \rho_{\sigma p} = 0$ $(p = 2, 4)$. Поскольку мы рассматриваем h-пространство непостоянной кривизны, необходимо положить $b_{13} = 0$, отсюда $\phi_{,13} = 0$. Подобным образом можно получить другие равенства (27).

Для h-пространств типов [321], [33], [411] и [51] из условий интегрируемости можно также получить подобным образом равенства (27).

Рассмотрим уравнение (25). Полагая $(ijk) = (1\sigma\sigma), (3\sigma\sigma), (\sigma\tau\sigma), (\tau\sigma\tau)$ $(\sigma, \tau = 5, 6, \sigma \neq \tau)$ для h-пространства типа [2211], мы определяем

$$\phi_{,1} = 0, \quad \phi_{,3} = 0, \tag{30}$$

$$\phi_{,\sigma} = f'_\sigma P_{\sigma\tau}, \quad \phi_{,\tau} = f'_\tau P_{\sigma\tau}, \quad P_{\sigma\tau} \equiv \frac{1}{2} \frac{b_{\tau\tau} g^{-1}_{\tau\tau} - b_{\sigma\sigma} g^{-1}_{\sigma\sigma}}{f_\tau - f_\sigma}, (\sigma \neq \tau). \tag{31}$$

Отсюда следует, что $f'_\sigma \phi_{,\tau} = f'_\tau \phi_{,\sigma}$. Следовательно, из условия $\phi_{,\sigma\tau} = 0$ мы получаем

$$\partial_{\sigma\tau}\phi = 0. \tag{32}$$

Используя соотношения, полученные из (25) с $(ijk) = (1\tau 2), (2\tau\tau), (\tau\tau\tau)$, мы находим

$$\phi_{,\tau} = \frac{1}{2} \frac{f'_\tau}{f_\tau - f_2} \left(\frac{b_{\tau\tau}}{g_{\tau\tau}} - \frac{b_{12}}{g_{12}} \right), \tag{33}$$

$$\phi_{,2} = \frac{\epsilon}{f_\tau - f_2} \left(\frac{b_{\tau\tau}}{g_{\tau\tau}} - \frac{b_{12}}{g_{12}} \right), \tag{34}$$

$$\frac{\partial_\tau b_{\tau\tau}}{g_{\tau\tau}} = -f'_\tau \sum_{i,j \neq \tau} (f_i - f_\tau)^{-1} \frac{b_{\tau\tau}}{g_{\tau\tau}} + 4\phi_{,\tau}. \tag{35}$$

Из (33) и (34) мы имеем

$$2\epsilon\phi_{,\tau} = f'_\tau \phi_{,2}. \tag{36}$$

Эти соотношения и условия $\phi_{,2\tau} = 0$ дают

$$\partial_{2\tau}\phi = 0. \tag{37}$$

Дифференцируя (33) по x^τ и учитывая (35), получаем

$$f'_\tau \partial_\tau \phi_{,\tau} = f''_\tau \phi_{,\tau}. \tag{38}$$

Теперь из (25) с $(ijk) = (142), (234)$ находим

$$\phi_{,2} = \frac{\tilde{\epsilon}}{f_4 - f_2} \left(\frac{b_{34}}{g_{34}} - \frac{b_{12}}{g_{12}} \right), \quad \phi_{,4} = \frac{\epsilon}{f_4 - f_2} \left(\frac{b_{34}}{g_{34}} - \frac{b_{12}}{g_{12}} \right). \tag{39}$$

Отсюда $\epsilon\phi_{,4} = \tilde{\epsilon}\phi_{,2}$ и, поскольку $\phi_{,24} = 0$, получаем $\partial_{24}\phi = 0$.

Предполагая, что $(ijk) = (3\tau 4), (4\tau\tau)$ в уравнении (25), получаем

$$2\tilde{\epsilon}\phi_{,\tau} = f'_\tau \phi_{,4}. \tag{40}$$

Следовательно, учитывая $\phi_{,4\tau} = 0$, мы имеем $\partial_{4\tau}\phi = 0$. Если не все $f'_\tau = 0$, то из (36), (38) и (40) получаем

$$\phi_{,\tau} = \frac{1}{2}a_1 f'_\tau, \quad \phi_{,2} = a_1\epsilon, \quad \phi_{,4} = a_1\tilde{\epsilon}. \tag{41}$$

Первое уравнение из (41) корректно всегда, когда $f'_\tau = 0$ из-за соотношения (33). Интегрируя уравнение (41), мы получаем

$$\phi = \frac{1}{2}a_1 \sum_{i=1}^{6} f_i = a_1\varphi, \quad f_1 = f_2 = \epsilon x^2, \quad f_3 = f_4 = \tilde{\epsilon}x^4 + a, \tag{42}$$

где φ определено формулой (17). Если все $f'_\tau = 0$, то из (26) с $(ijkl) = (\tau 2\tau 2), (\tau 4\tau 4)$ находим $\partial_{22}\phi = \partial_{44}\phi = 0$ и, значит, (42) корректно.

Для h-пространств типов [321], [33], [411] и [51] из уравнения (25) можно получить доказательство подобным образом.

Следовательно, теорема доказана.

Заключение. В данной работе мы установили важное свойство определяющей функции проективного движения в 6-мерном псевдоримановом пространстве специального типа. Следующая задача — это исследование свойств любого ковариантно-постоянного симметрического тензора в рассматриваемых пространствах, что вместе с результатами, полученными в этой работе, даст некоторое представление о проективно-групповых свойствах данных пространств и структуре проективной алгебры Ли. Также остается открытой проблема восстановления векторного поля, определяющего инфинитезимальное проективное преобразование.

Исследование частично поддержано грантом РФФИ 13–02–00475-а.

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] З. Х. Закирова, Кандидатская диссертация (КГУ, 2001).

[2] З. Х. Закирова, Итоги науки и техники. Серия: Проблемы геометрии, N 23, 57 (1997).

[3] З. Х. Закирова, *Тезисы международного геометрического семинара им. Н. И. Лобачевского* (КазГУ, Казань, 1997).

[4] З. Х. Закирова, Известия вузов. Математика N 9, 78 (1999).
[5] Z. Kh. Zakirova, Cz. J. Phys. **50**(11), 1541 (2005).
[6] Z. Kh. Zakirova, Theor. Math. Phys. **158**(3), 293 (2009).
[7] З. Х. Закирова, Краткие сообщения по физике ФИАН **38**(9), 39 (2011).
[8] З. Х. Закирова, Уфимский математический журнал **5**(3), 41 (2013).
[9] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия* (М., Издательство УРСС, 1998).
[10] Л. П. Эйзенхарт, *Риманова геометрия* (Москва, ИЛ, 1948).
[11] А. В. Аминова, УМН **50**(1), 69 (1995).
[12] П. А. Широков, Известия казанского физ.-мат. общества **25**(2), 86 (1925).

Поступила в редакцию 9 сентября 2014 г.