УДК 530.145

КЛАССИЧЕСКИЕ И КВАНТОВЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ В СИСТЕМЕ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ МОД

А. С. Аванесов[1], В. И. Манько[2]

Эволюция гауссовских состояний двух взаимодействующих осцилляторов, соответствующих модам электромагнитного поля, изучены в классической и в квантовой областях. Рассмотрение проведено как в представлении состояний функциями Вигнера, так и в томографическом вероятностном представлении квантовой механики. Корреляции в двухмодовой системе, в частности, запутанные состояния мод в квантовой области, рассмотрены с использованием томографического подхода. В классической области состояния двух мод описаны оператором плотности, который в этом случае может иметь отрицательные собственные значения.

Ключевые слова: квантовая томография, запутанность и сепарабельность состояния, волны Купмана–фон Неймана, операция частичного транспонирования.

Введение. Известно [1, 2], что состояния любой квантовой системы могут быть представлены в томографической форме. При этом волновая функция или матрица плотности состояния отображается на положительные распределения вероятности, называемые томограммой состояния. Томограмма состояния задаёт матрицу плотности состояния с помощью обратного отображения. Таким образом, квантовые состояния могут в томографическом вероятностном представлении квантовой механики описываться таким же образом, как состояние классических систем описывается в рамках классической статистической механики. Аналогично классические состояния могут быть описаны квантовоподобным образом. Такое описание было предложено в [3, 4]. Волновые функции для описания свободной классической частицы и классического осциллятора

[1] Факультет общей и прикладной физики, МФТИ, 141700 Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9; e-mail: daypatu@rambler.ru.
[2] ФИАН, 119991 Россия, Москва, Ленинский пр-т, 53.

рассматривались в [5–7]. Обзор квантовоподобного подхода к классическим системам и "классического" описания квантовых систем представлен [8]. Важным свойством квантовых систем является наличие сильных квантовых корреляций подсистем в случае запутанных состояний составных систем. Запутанность квантовых состояний изучалась для состояний с функцией Вигнера [9] гауссовской формы в [10, 11]. Цель настоящей работы – изучить свойства запутанности гауссовских состояний для классического двухмодового осциллятора. Мы строим для этого осциллятора оператор плотности [12, 13] и применяем критерий запутанности состояний [14–16] к функции распределения вероятности в фазовом пространстве, проводя аналогию с функцией Вигнера состояния квантового осциллятора. Мы также опишем эволюцию классического осциллятора, вводя для этого функцию Грина уравнения эволюции классической волновой функции, подобного уравнению Шрёдингера.

Функция Грина для классического состояния. Одним из способов описания состояния в квантовой механике является задание функции Вигнера, она связана с матрицей плотности данного состояния посредством преобразований

$$W(q,p,t)=\int du\ \rho\left(q+\frac{u}{2},q-\frac{u}{2},t\right)e^{-ipu},$$

$$\rho(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\int dp\ W\left(\frac{x+y}{2},p,t\right)e^{ip(x-y)}. \qquad (1)$$

В классической механике мы задаем состояние с помощью нормированной неотрицательной функции, определенной в фазовом пространстве. Возникает желание ввести и другой подход описания состояния по аналогии с тем, как в квантовой механике мы переходили от представления волновой функции (матрицы плотности) к представлению Вигнера, только в случае классической механики двигаться будем в противоположном направлении. Иными словами, мы хотим предложить описание классического состояния векторами в гильбертовом пространстве.

Данный подход впервые был предложен Купманом и фон Нейманом [3, 4]. В классическом случае переход от фазового пространства к гильбертовому осуществлялся с помощью преобразований

$$f(q,p,t)=\frac{1}{2\pi}\int du\ \rho\left(q+\frac{u}{2},q-\frac{u}{2},t\right)e^{-ipu},$$

$$\rho(x,y,t)=\int dp\ f\left(\frac{x+y}{2},p,t\right)e^{ip(x-y)}. \qquad (2)$$

В физических приложениях встречаются системы с гамильтонианом вида

$$H = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \frac{1}{2} Q_\alpha B_{\alpha\beta} Q_\beta, \tag{3}$$

где $Q_\alpha = (p_1, p_2, ..., p_N, q_1, q_2, ..., q_N)$, а N – размерность системы. Нашей целью является выражение для функции Грина для волновой функции классического состояния данной системы. Выразим функцию Грина соответствующей классической волновой функции через интегралы движения. Данная задача для квантового случая была решена в [17].

Мы можем связать оператор эволюции для уравнения Лиувилля с функцией Грина волнового уравнения для этой же системы. Для удобства обозначим преобразование (2) от классической матрицы плотности к функции распределения вероятностей как $\hat{F}$, и обратное ему преобразование как $\hat{F}^{-1}$, пусть $\hat{B}$ – оператор эволюции для матрицы плотности, то есть $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \hat{B}\rho_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, тогда

$$\hat{B} = \hat{F}^{-1}\hat{\Pi}\hat{F}, \tag{4}$$

где $\hat{\Pi}$ – оператор эволюции функции распределения вероятности,

$$F^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\delta\left(\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2} - \mathbf{q}\right),$$

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2\pi} e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\delta\left(\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2} - \mathbf{q}\right). \tag{5}$$

Для начала найдём оператор эволюции для функции распределения вероятностей, то есть решим эту задачу в фазовом пространстве. Потом посредством преобразований выражения (4) мы сможем получить функцию Грина, то есть ядро оператора эволюции для волновой функции.

Пусть функция $\widetilde{Q} = \Lambda(t)Q(t)$ – интеграл движения. В начальный момент времени функция распределения вероятностей $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, 0) = f_0(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Пусть $\widehat{\Pi}(t)$ – оператор эволюции для функции распределения, то есть $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \widehat{\Pi}(t) f_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \int \Pi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{q}', \mathbf{p}', t)\ f_0(\mathbf{q}', \mathbf{p}')\ \mathbf{dq}'\ \mathbf{dp}'$.

Заметим, что ядро этого оператора можно выразить через интегралы движения. Действительно, пусть $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}$, причем мы для краткости опустили зависимость от времени в записи λ-матриц, в дальнейшем эта зависимость всегда подразумевается, но специально обозначаться не будет. В итоге получаем $\Pi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{q}', \mathbf{p}', t) = \delta(\mathbf{p}' - \lambda_1\mathbf{p} - \lambda_2\mathbf{q})\ \delta(\mathbf{q}' - \lambda_3\mathbf{p} - \lambda_4\mathbf{q})$.

Теперь нужно подставить выражение для оператора эволюции функции распределения в (4). После интегрирования и некоторых преобразований мы получаем для $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}', \mathbf{y}', t)$ выражение

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}', \mathbf{y}', t) = \frac{1}{2\pi \det \lambda_3} \exp\left\{-\frac{i}{2}\left[\mathbf{x}^T\lambda_3^{-1}\lambda_4\mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T\lambda_3^{-1}\mathbf{x}' + \mathbf{x}'\lambda_1\lambda_3^{-1}\mathbf{x}'\right]\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{i}{2}\left[\mathbf{y}^T\lambda_3^{-1}\lambda_4\mathbf{y} - 2\mathbf{y}^T\lambda_3^{-1}\mathbf{y}' + \mathbf{y}'\lambda_1\lambda_3^{-1}\mathbf{y}'\right]\right\}. \qquad (6)$$

При этом мы воспользовались следующими соотношениями для λ-матриц: $\lambda_4\lambda_3^T = \lambda_3\lambda_4^T$, $\lambda_3^T\lambda_1 = \lambda_1^T\lambda_3$, $\lambda_4\lambda_1^T - \lambda_3\lambda_2^T = I$. Эти соотношения являются следствием сохранения скобок Пуассона интегралов движения в процессе эволюции.

Функцию Грина для классической волновой функции мы получим с помощью факторизации $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}', \mathbf{y}', t) = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)G^*(\mathbf{y}, \mathbf{y}', t)$. При этом мы имеем некоторую свободу в выборе фазы, зависящей от времени: $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) \to G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)e^{i\phi(t)}$. Эту фазу мы определяем так, чтобы функция $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ удовлетворяла соответствующему уравнению эволюции классической волновой функции, подобному уравнению Шрёдингера $i\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{x}',t)}{\partial t} = \hat{H}G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$.

В итоге получаем выражение для функции Грина

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \det \lambda_3}} \exp\left\{-\frac{i}{2}\left[\mathbf{x}^T\lambda_3^{-1}\lambda_4\mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T\lambda_3^{-1}\mathbf{x}' + \mathbf{x}'\lambda_1\lambda_3^{-1}\mathbf{x}'\right]\right\}. \qquad (7)$$

Квантовые и классические корреляции. Перейдём ко второй части нашей работы. По определению состояние системы, состоящей из двух подсистем, описываемой в гильбертовом пространстве $H_A \otimes H_B$, является сепарабельным тогда и только тогда, когда существуют коэффициенты $\left\{p_k \mid p_k \geq 0, \sum\limits_k p_k = 1\right\}$ и $\rho_k^A \in H_A$, $\rho_k^B \in H_B$, $\rho_k^A \geq 0$, $\rho_k^B \geq 0$ такие, что

$$\rho = \sum_k p_k \ \left(\rho_k^A \otimes \rho_k^B\right), \qquad (8)$$

в противном случае состояние будет запутанным.

Заметим, что, если классическая матрица плотности, задающая некоторое состояние, имеет отрицательные собственные значения, то соотношение неопределённостей для этого состояния не выполняется.

Разберём этот момент подробнее. В квантовой механике должно выполняться соотношение неопределённостей. Запишем его в следующем виде

$$\sigma + \frac{i}{2}\Omega \geq 0, \qquad (9)$$

где $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{q,q} & \sigma_{q,p} \\ \sigma_{p,q} & \sigma_{p,p} \end{pmatrix}$, $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_{Q_\alpha,Q_\beta} = \langle \frac{\{\widehat{Q}_\alpha - \langle \widehat{Q}_\alpha \rangle, \widehat{Q}_\beta - \langle \widehat{Q}_\beta \rangle\}}{2} \rangle$, где $\widehat{Q} = (\widehat{p}, \widehat{q})$, $\left\{\widehat{Q}_\alpha, \widehat{Q}_\beta\right\}$ – антикоммутатор операторов $\widehat{Q}_\alpha$ и $\widehat{Q}_\beta$.

Если же условие (9) не выполняется для некоторой матрицы ρ, то эта матрица ρ не будет положительно полуопределена и не будет являться матрицей плотности квантового состояния.

В классической физике нам будет достаточно более слабого условия, а именно: матрица ковариаций должна быть положительной, $\sigma \geq 0$.

Рассмотрим систему, состоящую из двух подсистем. Нас интересует вопрос – является ли состояние этой системы сепарабельным или запутанным? Существует необходимое условие сепарабельности состояния, известное как критерий Переса–Городецкого [14, 15].

Подвергнем данную нам матрицу плотности ρ операции частичного транспонирования. Утверждается, что если состояние является сепарабельным, то полученная после данного преобразования матрица также будет являться матрицей плотности, то есть сохранится её положительность.

В случае, если состояние описывается гауссовскими функциями, эти необходимые условия являются ещё и достаточными [16], то есть в гауссовском случае мы имеем критерий сепарабельности состояния. Если состояние запутанное, то после частичного транспонирования мы получаем функцию ρ^{ppt}, которая нарушает условие (9).

Перейдём к классическим состояниям. Будем также, как и в квантовом случае, рассматривать систему, состоящую из двух подсистем. Рассмотрим гауссовские состояния, которые будут удовлетворять соотношению (9). Произведём частичное транспонирование для нашего классического состояния. Будут возможны два случая, когда преобразованная матрица ковариаций будет удовлетворять соотношению неопределённостей, и когда не будет. Как говорилось выше, по тому, соблюдаются или не соблюдаются соотношения (9), мы можем дать ответ, является ли состояние запутанным или сепарабельным. Давайте и для классических, и для квантовых состояний введём определение запутанности через соотношения неопределенностей.

Определение: если соотношение

$$\sigma^{ppt} + \frac{i}{2}\Omega \geq 0 \tag{10}$$

для преобразованной матрицы выполняется, то состояние сепарабельное, если не выполняется, то состояние запутанное. Здесь σ^{ppt} – матрица, получившаяся из матрицы ковариаций после частичного транспонирования. При этом мы должны сделать замечание. Если соотношение (10) не будет соблюдаться, то матрица ρ^{ppt}, которую мы получили с помощью частичного транспонирования, всё равно будет являться классической, то есть будет описывать некоторое классическое состояние. Действительно, после частичного транспонирования матрица ковариаций всё равно останется положительной, то есть будет являться матрицей ковариаций некоторого классического состояния.

Операция частичного транспонирования в фазовом пространстве означает изменение знака у импульса во второй подсистеме

$$f(q_1, q_2, p_1, p_2) \stackrel{ppt}{\to} f(q_1, q_2, p_1, -p_2),$$

то есть можно сказать, что частичное транспонирование означает обращение времени во второй подсистеме. Как мы видели, в квантовом случае, если состояние запутанное, то после частичного транспонирования мы не получаем какое-либо квантовое состояние, то есть это означает то, что мы не можем обращать время во второй подсистеме, если состояние запутано. В классическом случае после частичного транспонирования мы всё-таки получаем какую-то матрицу плотности ρ или функцию, определённую в фазовом пространстве, которые описывают некоторое классическое состояние. Таким образом, в классическом случае, если состояние запутанное (в том смысле, в котором мы определили запутанность для классического состояния), мы всё равно можем осуществить обращение времени во второй подсистеме.

Заключение. Мы показали, что для состояния классического осциллятора с гауссовской функцией распределения в фазовой плоскости можно определить понятие сепарабельности и запутанности по аналогии с этими понятиями в квантовой механике. Можно классифицировать классические состояния, разделяя их на запутанные и сепарабельные. При этом разница заключается в том, что запутанные гауссовские классические состояния при применении к ним операции частичного транспонирования остаются классическими состояниями с дисперсиями координат и импульсов, нарушающими соотношение неопределённостей Шрёдингера–Робертсона [18, 19], что недопустимо для квантовых состояний.

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] S. Mancini, V. I. Man'ko and P. Tombesi, Phys. Lett. A, **213**, 1 (1996).
[2] A. Ibort, V. I. Man'ko, G. Marmo, et al., Phys. Scr. **79**, 065013 (2009).

[3] B. O. Koopman, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **17**, 315 (1931).
[4] J. von Neumann, Ann. Math. **33**, 587 (1932); ibid. **33**, 789 (1932).
[5] V. N. Chernega and V. I. Man'ko, J. Russ. Laser Res. **28**, 6 (2007).
[6] Elliott Francesco Tammaro, Found. Phys. **42**(2), 284 (2012).
[7] Dmitry B. Lemeshevskiy, Vladimir I. Man'ko, J. Russ. Laser Res. **33**, 2 (2012).
[8] M. A. Man'ko, V. I. Man'ko, G. Marmo, et al., Nuovo Cim. C, **36**, Ser.3, 163 (2013).
[9] E. Wigner, Phys. Rev. **40**, 749 (1932).
[10] L. M. Duan, G. Giedke, J. I. Cirac, P. Zoller, Phys. Rev. Lett. **84** (12), 2722 (2000).
[11] Gerardo Adesso and Fabrizio Illuminati, J. Phys. A: Math. Theor. **40**, 7821 (2007).
[12] V. N. Chernega and V. I. Manko, AIP Conf. Proc. **1424**, 33.
[13] O. V. Man'ko and V. I. Man'ko, J. Russ. Laser Res. **118**, 407 (1997).
[14] A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996).
[15] P. Horodecki, Phys. Lett. A, **232**, 333 (1997).
[16] R. Simon, Phys. Rev. Lett. **84**, 2726 (2000).
[17] В. В. Додонов и В. И. Манько, Труды ФИАН **183**, (1987).
[18] H. P. Robertson, Phys. Rev. **34**, 163 (1929).
[19] E. Schrödinger, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 296 (1930).

Поступила в редакцию 30 мая 2014 г.