

2D-МОДЕЛИРОВАНИЕ КОГЕРЕНТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ НАКЛОННЫХ ОБЪЕКТОВ

А. С. Бусаров, А. В. Виноградов, Н. Л. Попов

Предложен простой вывод преобразования полей в оптической системе для прямых и наклонных объектов. Он использован для создания алгоритма и программ численного определения пространственного разрешения оптических систем. Предполагается применение разрабатываемых методов для отражательной рентгеновской микроскопии.

Ключевые слова: оптика скользящего падения, получение рентгеновских когерентных изображений, наклонный объект, численное моделирование.

Введение. По мере развития когерентных источников рентгеновского излучения (генераторы гармоник ИК-лазеров, лабораторные рентгеновские лазеры, источники СИ 3-го поколения, лазеры на свободных электронах [1, 2]) всё большее распространение и актуальность приобретают методы исследования материалов и поверхностных структур под малыми углами скольжения. При этом речь идёт как об измерении коэффициентов отражения и рассеяния (рефлектометрии), так и о получении изображений (микроскопии) [3]. Похожие условия эксперимента выбираются при измерении распределения заряда в сгустках электронных ускорителей по их переходному излучению [4].

В обоих приведённых примерах возникает естественный вопрос о выборе подходящих оптических схем, переносящих в когерентных пучках изображение наклонного объекта на детектор. Очевидно, что из-за малых углов скольжения обычные схемы, когда объект рассматривается нормально к поверхности (на просвет или в отражении) и оптическая ось перпендикулярна ей, могут оказаться непригодны.

В данной работе этот вопрос исследуется на качественном уровне, с последующим применением численных расчетов. Используется 2D-геометрия, параксиальная оптика и идеальные оптические элементы. Такая идеализация задачи даёт возможность найти явные соотношения, которые указывают положение оптических элементов и детектора, позволяющие с той или иной точностью добиться подобия изображения и предмета.

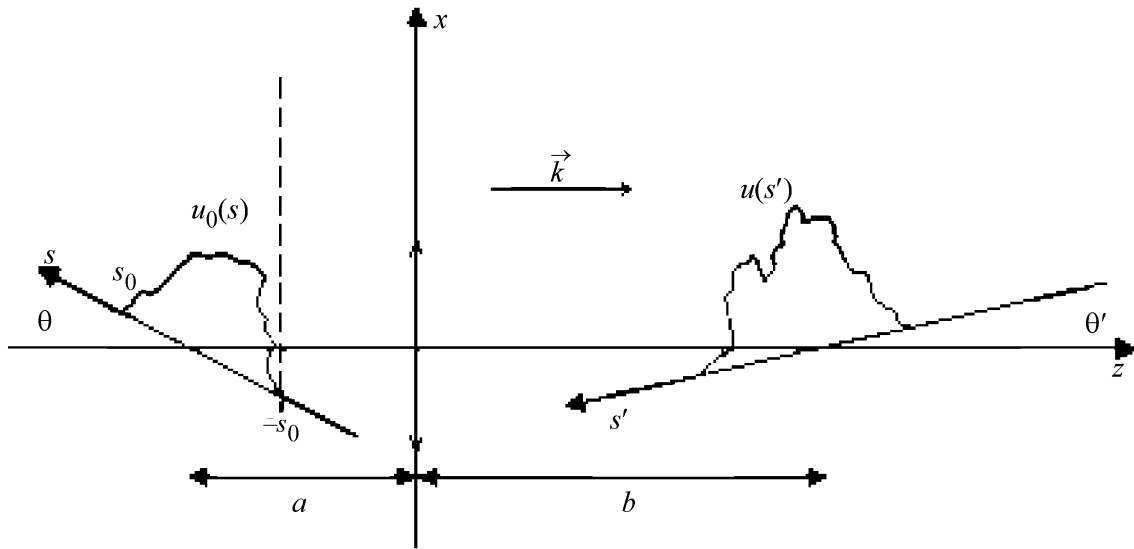


Рис. 1: Оптическая схема: s, s' – плоскости объекта и его изображения, линза расположена в плоскости xy ; a, b – оптически сопряженные точки, s_0 – размер предмета; $u_0(s), u(s')$ – распределения поля объекта и его изображения; \vec{k} – волновой вектор; θ, θ' – углы наклона плоскостей объекта и его изображения к оси z .

Поясним вначале метод, применяя его к теории оптических преобразований [5]. Сначала рассмотрим преобразование, связывающее поле предмета и поле его изображения линзой. Оно основано на интеграле Френеля (см. рис. 1, при $\theta = \pi/2$) для поля $u(x, z)$:

$$u(x, z) = \sqrt{\frac{k}{2\pi i(z+a)}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0 \exp\left(\frac{ik(x-s)^2}{2(z+a)}\right) ds, \quad (1)$$

создаваемого когерентным парааксиальным пучком, распространяющимся перпендикулярно поверхности объекта (вдоль оси z); где $u_0(s)$ – поле на поверхности объекта. Возьмем поле объекта $u_0(s)$ в виде пространственной гармоники e^{iqs} . Оно создаёт согласно (1) между объектом и линзой поле:

$$u(x, z) = \exp\left(iqx - i\frac{q^2}{2k}(z+a)\right), \text{ для } u_0(s) = \exp(iqs) \text{ и } \theta = \pi/2. \quad (2)$$

Идеальная линза действует, как фазовый множитель $T(s) = \exp(-iks^2/2f)$, где f – фокусное расстояние, так что на правой её стороне поле имеет вид:

$$u_0(s) = u(x = s, z = 0) \cdot T(s),$$

$$u_0(s) = \exp\left(-i\frac{q^2}{2k}a + iqs - i\frac{k}{2f}s^2\right). \quad (3)$$

Поле справа от линзы находим, применяя к (3) интеграл Френеля (1):

$$u(x, z) = \frac{1}{i\sqrt{z\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{z}\right)}} \exp\left\{i\frac{kx^2}{2fz\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{z}\right)}\right\} \exp\left\{-i\frac{qx}{z\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{z}\right)} - i\frac{q^2}{2k}\left(a - \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{z}}\right)\right\}, \quad (4)$$

где z отсчитывается от поверхности линзы, в то время как в (2) – от предмета.

Выражение (4) показывает, что поле за линзой может быть сведено к той же зависимости от q , что и поле $u_0(s)$ в предметной плоскости (см. (2)) – к фурье-гармонике, если приравнять нулю коэффициент при q^2 в показателе экспоненты (4). Это можно сделать, если выбрать $z = b$ (см. рис. 1) из условия:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \quad (5)$$

тогда плоскость изображения будет располагаться перпендикулярно оптической оси z , т. е. $\theta' = \pi/2$. Условие (5) является формулой линзы. В этом случае поле (4) на детекторе (т.е. при $z = b, x = -s'$) принимает вид:

$$u(s') = \frac{1}{\sqrt{M}} \exp\left(i\frac{ks'^2}{2Mf} - i\frac{\pi}{2}\right) \exp\left(i\frac{qs'}{M}\right), \quad (6)$$

где $M = b(1/f - 1/b) = b/a$ – коэффициент увеличения, который определяется из условия, что $1/M$ – коэффициент при iqs' . Поскольку оба выражения: $u(s')$ в (6) и $u_0(s)$ в (2) являются гармониками относительно q , то распределения $|u(s')|^2$ на детекторе и $|u_0(s)|^2$ на предмете подобны при любой форме $u_0(s)$. Таким образом, мы получили хорошо известное свойство идеальной линзы [5]. В следующем разделе мы применим аналогичный метод для описания изображения наклонного объекта.

Изображение наклонного объекта. Возьмём поле на предмете снова в форме гармоники (2). В этом случае, когда $\theta \neq \pi/2$, интеграл Френеля не определён. Однако в параксиальной оптике, если пучок распространяется вдоль z , можно воспользоваться параболическим уравнением:

$$2ik\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (7)$$

с граничным условием, заданным на наклонном объекте [6]. Легко убедиться, что при $\theta \neq \pi/2$ решение вместо (2) имеет вид:

$$u(x, z) = \exp \left\{ i\alpha(q)x - i\frac{\alpha^2(q)}{2k}(z + a) \right\}. \quad (8)$$

Величина $\alpha(q)$ определяется уравнением

$$\alpha(q) \sin \theta + \frac{\alpha^2(q)}{2k} \cos \theta = q, \text{ откуда } \alpha(q) = k \operatorname{tg} \theta (\sqrt{1 + \Phi} - 1), \quad \Phi = \frac{2q \cos \theta}{k \sin^2 \theta}, \quad (9)$$

следующим из граничного условия на наклонной плоскости $u(x = s \sin \theta, z = -a - s \cos \theta) = u_0(s)$, где Φ – безразмерный параметр, оказывающий влияние на разрешение получаемого изображения [6]. Далее действуем по аналогии со случаем $\theta = \pi/2$, изложенным во введении. На правой поверхности линзы вместо (3) получаем:

$$u_0(s) = \exp \left\{ -i\frac{\alpha^2(q)}{2k}a + i\alpha(q)s - i\frac{ks^2}{2f} \right\}. \quad (10)$$

Поскольку поле (10) вновь задано на поверхности, перпендикулярной направлению распространения волны, то можно использовать интеграл Френеля (1), что в пространстве за линзой даёт выражение (11), которое получено путем замены q на $\alpha(q)$ в формуле (4), поскольку начальные распределения (3) и (10) совпадают с точностью до такой замены:

$$u(x, z) = \frac{1}{i\sqrt{z\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{z}\right)}} \exp \left\{ i\frac{kx^2}{2fz\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{z}\right)} \right\} \exp \left\{ -i\frac{\alpha(q)x}{z\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{z}\right)} - i\frac{\alpha^2(q)}{2k} \left(a - \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{z}} \right) \right\}, \quad (11)$$

В отличие от (4) зависимость показателя экспоненты от q оказывается теперь не квадратичной, а более сложной. Поэтому о подобии можно говорить лишь приближённо (то есть до деталей не меньше определённого масштаба), раскладывая $\alpha(q)$ в ряд:

$$\alpha(q) = \frac{q}{\sin \theta} - \frac{q^2 \cos \theta}{2k \sin^3 \theta} + \dots, \quad (12)$$

ограничиваясь в разложении показателя экспоненты (11) членом $\propto q^2$ и приравнивая в нем коэффициент при q^2 нулю, получаем:

$$x^0 = (z - b)\operatorname{tg} \theta', \text{ где } \frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a}, \operatorname{tg} \theta' = \frac{a}{b}\operatorname{tg} \theta. \quad (13)$$

Таким образом, подобия следует ожидать при расположении детектора на прямой (13). Она показана лучом s' на рис. 1. Легко убедиться, что эта прямая является изображением “поверхности” предмета в линзе. Этот результат другим способом был получен в [6]. Поле на детекторе в соответствии с (11)–(13) равно:

$$u(x, z) = \frac{1}{\sqrt{z \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{z} \right)}} \exp \left\{ i \frac{kx^2}{2fz \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{z} \right)} - i \frac{\pi}{2} \right\} \exp \left\{ -i \frac{qx}{z \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{z} \right) \sin \theta} \right\}, \quad (14)$$

где x и z связаны соотношением (13). Видно, что от q зависит только вторая экспонента, которая является по q вновь фурье-гармоникой. Сделав в (14) замену: $x = -s' \sin \theta'$, $z = b - s' \cos \theta'$, можно найти поле изображения $u(s')$. Учитывая, что размер изображаемого предмета много меньше фокусного расстояния ($s_0 \ll f$), можно считать $z \approx b$, тогда получается:

$$u(s') \approx \frac{1}{\sqrt{M}} \exp \left\{ i \frac{ks'^2 \sin^2 \theta'}{2fM} - i \frac{\pi}{2} \right\} \exp \left\{ i \frac{qs' \sin \theta'}{M \sin \theta} \right\}, \quad (15)$$

где $M = b/a$, но теперь это уже не увеличение, а просто обозначение, увеличение же M' , определяется, как и в предыдущей части, из условия, что $1/M'$ – коэффициент при iqs' . Принимая во внимание формулы (13), получим для M' следующее выражение:

$$M'^2(\theta) = M^2 \sin^2 \theta + M^4 \cos^2 \theta, \quad M = \frac{b}{a}, \quad (16)$$

что соответствует геометрико-оптическому изображению.

Формулы (13), (16) показывают, что при работе с увеличением $M'^2(\theta) > 1$ детектор должен быть наклонён к оптической оси больше, чем предмет. Это, очевидно, может быть серьёзным препятствием к получению изображений в экспериментах по когерентной отражающей микроскопии и переходному излучению в рентгеновском диапазоне.

Линза конечной апертуры. Примеры. В предыдущем разделе связь между плоскостями наклонного объекта и его изображения (13), а также соотношение их полей (2) и (14), установлены эвристическим путем на примере идеальной линзы бесконечной апертуры НА. Для того чтобы представить каково может быть качество изображений наклонных объектов, передаваемых более реальной оптической системой, были выполнены расчеты в параксиальном приближении.

Наш подход к численным расчётам полей основан на интегральной формуле ТОИ (tilted object integral) [6]:

$$u(x, z) = \sqrt{\frac{k}{2\pi i}} (x \cos \theta + z \sin \theta) \int_{-z/\cos \theta}^{\infty} \frac{u_0(s) ds}{(z + s \cos \theta)^{3/2}} \exp \left[i \frac{k(x - s \sin \theta)^2}{2(z + s \cos \theta)} \right] \quad (17)$$

для поля, создаваемого наклонным объектом. Как и интеграл Френеля, ТОИ является точным решением параболического волнового уравнения. При $\theta = \pi/2$ он переходит в интеграл Френеля. Поскольку, как правило, поле $u_0(s)$ в плоскости объекта можно считать известным лишь в его границах, то формулу (17) следует применять при $z < -a + s_0 \cos \theta$. При $z = -a + s_0 \cos \theta$ формула (17) определяет поле в вертикальной плоскости, проходящей через правый край наклонного объекта (смотри рис. 1). Оно служит исходным (начальным) распределением поля для моделирования дальнейшего распространения пучка в пространстве (включая оптическую систему) методом интеграла Френеля. Такой подход анализировался в [7]. В частности, было показано, что, как и следует ожидать, в плоскости, оптически сопряжённой предмету, появляется чёткое изображение.

В настоящей работе для численной оценки пространственного разрешения при отображении наклонного объекта (см. рис. 1) было выбрано поле вида:

$$u_0(s) = \begin{cases} \sin^2 \left(\frac{s}{d} \pi \right), & -d < x < d \\ 0, & x < -d, x > d. \end{cases} \quad (18)$$

Величину d в (18) можно рассматривать, как масштаб объекта или его характерной детали. Расчёты проводились для увеличения 1:1, то есть $b = a = 2f$ и $M = 1$. Углы наклона менялись от 90° до 1° . На рис. 2 пунктиром представлена интенсивность поля $|u_0(s)|^2$ на объекте. Линза считалась идеально тонкой, но с конечной апертурой $\text{NA}=0.2$. Для определения пространственного разрешения δ в когерентном пучке сравнивались изображения при различных отношениях периода объекта и длины волны: d/λ . Распределения $|u(s)|^2$, представленные на рис. 2, позволяют легко определить пространственное разрешение δ оптической системы для любого угла наклона.

В качестве критерия пространственного разрешения зададимся определённой “резкостью” изображения. Например, потребуем, чтобы отношение интенсивностей на приёмнике в провале и в максимуме не превышало величину:

$$\frac{\min |u(s)|^2}{\max |u(s)|^2} \leq 0.8. \quad (19)$$

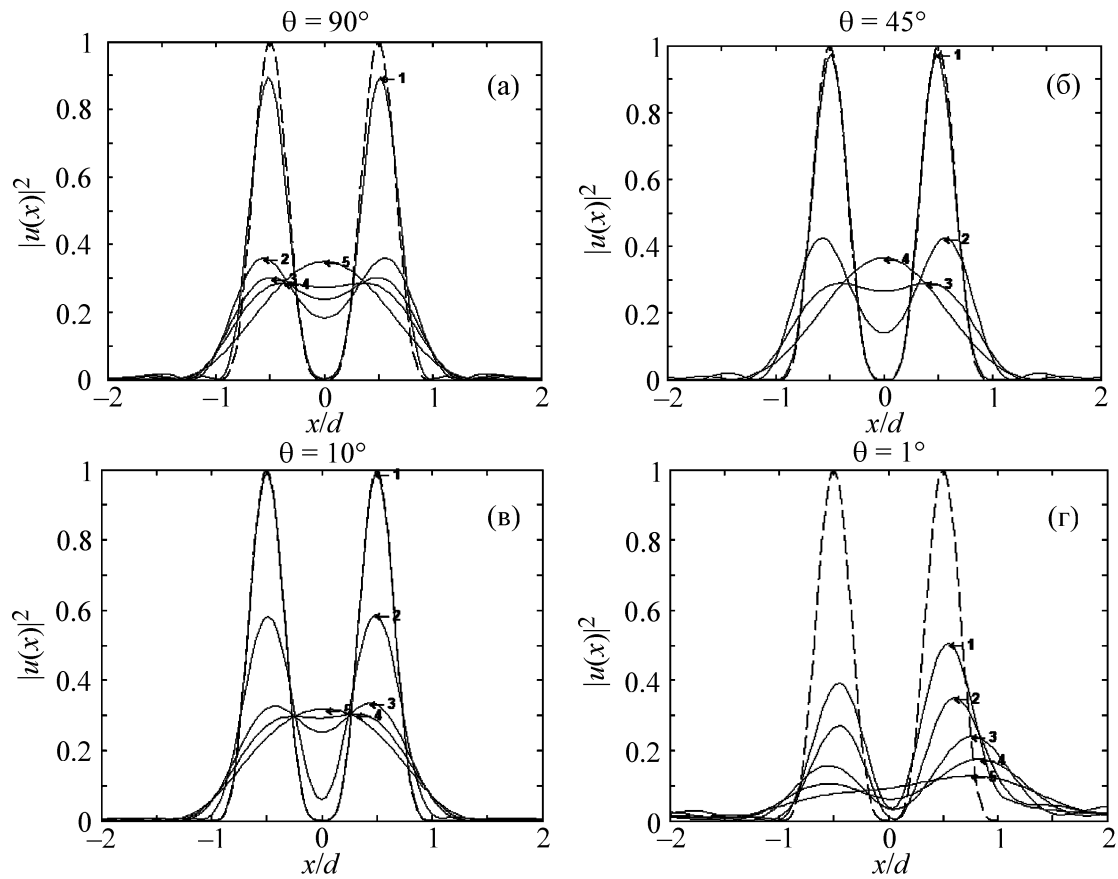


Рис. 2: Численное определение пространственного разрешения по изображению тестового объекта (18) линзой с числовой апертурой $NA = 0.2$. (а) объект расположен вертикально ($\theta = 90^\circ$), $\Phi = 0$. Кривые 1–5 соответствуют отношениям $d/\lambda = 6; 4; 3.7; 3.5$ и 3 соответственно. (б) тестовый объект расположен под углом $\theta = 45^\circ$ к оси. Кривые 1–4 соответствуют следующим значениям d/λ и параметра Φ (см. (9)): $(10; 0.28)$, $(6; 0.47)$, $(5; 0.57)$ и $(4; 0.71)$ соответственно. (в) $\theta = 10^\circ$. Кривые 1–5 соответствуют следующим значениям d/λ и параметра Φ (см. (9)): $(70; 0.93)$, $(30; 2.2)$, $(19; 3.4)$, $(17; 3.8)$ и $(15; 4.4)$ соответственно. (г) $\theta = 1^\circ$. Кривые 1–5 соответствуют следующим значениям d/λ и параметра Φ (см. (9)): $(500; 13)$, $(100; 66)$, $(70; 94)$, $(60; 110)$ и $(50; 130)$ соответственно.

Тогда из кривых рис. 2 находим разрешение $\delta/\lambda = 3.7; 5.3; 19; 55$ для углов наклона $90^\circ; 45^\circ; 10^\circ$ и 1° соответственно. В табл. 1 эти величины

Т а б л и ц а 1

Пространственное разрешение изображения

θ	90°	45°	10°	1°
δ/λ	3.7	5.3	19	55
$\delta'\lambda$	5.0	7.1	29	286
δ/δ'	0.74	0.75	0.66	0.19

сравниваются с интуитивной формулой, основанной на аналогии с интегралом Френеля:

$$\delta' = \frac{\lambda}{NA \cdot \sin \theta}. \quad (20)$$

Видно, что величина δ/δ' уменьшается более чем втрое при изменении угла наклона от 90° до 1°. Подчеркнём, что этот эффект обнаружен в численных расчётах полей методом ТОИ (см. (17)). Его нельзя объяснить, если даже предположить, что интеграл Френеля можно “приспособить” к наклонным объектам.

Заключение. Представлен наглядный вывод аналога формулы линзы для изображения наклонного объекта, освещенного когерентным пучком. С помощью полученного ранее [6] обобщения интеграла Френеля выполнены расчеты изображений тестового объекта при различных углах θ его наклона к оптической оси, что позволило определить пространственное разрешение оптической системы с апертурой $NA=0.2$ при углах $\theta = 45^\circ, 10^\circ$ и 1° . Как показало численное моделирование, реальное разрешение при скользких углах оказывается значительно лучше, чем можно было бы ожидать на основании модификации интеграла Френеля на случай наклонных объектов.

Развитый подход может быть использован в рентгеновской оптике для получения изображений объектов в отраженных пучках при углах скольжения вблизи критического угла полного внешнего отражения.

Работа проведена при поддержке программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Фундаментальные и прикладные проблемы фотоники и физика новых оптических материалов”.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] Won Namkung, “Review of Third Generation Light Sources”, Proc. IPAC 2010 (Kyoto, Japan, 2010), (Univ. Kyoto, 2010), p. 2411; <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/IPAC10/papers/wexra01.pdf>.

- [2] Primoz Rebernik Ribic and G. Margaritondo, J. Phys. D: Appl. Phys. **45**, 213001 (2012).
- [3] Michael Zürich, Christian Kern and Christian Spielmann, Optics Express **21**(18), 21131 (2013).
- [4] L. G. Sukhikh, S. Bajt, G. Kube, et al., Beam profile imaging based on backward transition radiation in the EUV region, in Proceedings IPAC 2012, New Orleans, Louisiana (Louis. Univ., 2012), p. 819; <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/IPAC2012/papers/moppr019.pdf>.
- [5] A. Papoulis, *Systems and Transforms With Applications in Optics* (Krieger Pub. Co., 1981; McGraw-Hill, 1968).
- [6] I. A. Artyukov, R. M. Feshchenko, N. L. Popov, and A. V. Vinogradov, Journal of Optics **16**(3), 035703 (2014).
- [7] И. А. Артюков, А. В. Виноградов, Н. Л. Попов, В. Н. Селезнев, Квантовая электроника **42**, 140 (2012).

Поступила в редакцию 25 декабря 2014 г.