УДК 534.1 W:530.182

НОВЫЙ ТИП БРИЗЕРА В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЗИКИ

А. А. Березин

В целях качественного расширения свойств возврата Ферми–Паста–Улама, описанного Забуски и Крускалом в рамках дискретного уравнения КДВ, рассмотрен новый тип бризерного решения параметрически связанных дискретных уравнений Гинзбурга–Ландау и КДВ.

Бризерное решение уравнения синус-Гордона характерно для ряда задач нелинейной физики. В частности, к нему приводится описание механизма самоиндуцированной прозрачности в нелинейной оптике [1], модель джозефсоновской линии передачи [2], описание динамики движения доменных стенок в ферромагнетике [3] и ряд других задач [4]. При этом, общее бризерное решение уравнения синус-Гордона выглядит следующим образом:

$$\varphi_B(x,t) = 4\text{arctg}\{\text{tg}\sin\theta[(\cos\theta)t]\text{sech}[(\sin\theta)x]\}, \tag{1}$$

где $\frac{d\theta}{dt}$ – частота пульсаций бризера.

Сопоставимые с экспериментом решения, например, для джозефсоновских контактов, могут быть получены только при задании граничных условий

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=l}, \tag{2}$$

где l – безразмерная длина линии, определяющая размер бризера.

Наряду с (1) в задачах моделирования динамики движения доменных стенок в ферромагнетиках встречаются решения со стохастизацией бризера, возникающие за счет параметрической модуляции уравнения синус-Гордона внешней возмущающей силой с частотой Ω. При этом использование критерия Чирикова [5] позволяет получить выражение для расстояния между соседними резонансами колебаний бризера в следующем виде [6]:

$$\Delta\omega = \max|\omega_{m+1} - \omega_m| = \frac{\Omega}{m^2}. \tag{3}$$

Если ширина нелинейных резонансов больше расстояния между ними, то наступает стохастизация колебаний. Кроме того, было показано [7], что наличие периодических граничных условий для уравнения синус-Гордона могут приводить к появлению решений в виде возврата Ферми–Паста–Улама [8]. Рассмотрим этот вопрос несколько подробнее. Приведем дифференциально-разностное уравнение, предложенное Забуски и Крускалом для описания возврата ФПУ [9]:

$$\frac{d^2y_j}{dt^2} = (y_{j+1} - y_j) - (y_j - y_{j-1}) + \frac{1}{3}\left[(y_{j+1} - y_j)^3 - (y_j - y_{j-1})^3\right]. \tag{4}$$

По сравнению с классическим описанием цепочки ФПУ [8] в уравнении (4) произведено перемасштабирование для получения коэффициента 1/3 при нелинейном члене. Как показали Забуски и Крускал [9], при переходе к континуальному пределу $y > y(x,t)$ и производя замену переменных

$$u = \frac{y_t}{2h} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{y_x}(1 + h^2\eta^2)^{1/2}d\eta, \tag{5}$$

можно преобразовать уравнение (4) в низшем порядке при $\Delta x = h = L/N$ в модифицированное уравнение КДВ

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + 12u^2\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u^3}{\partial \xi^3} = 0, \tag{6}$$

где L – длина цепочки, N – число осцилляторов, а временная и пространственная координаты перемасштабируются следующим образом: $\tau = h^3t/24$ и $\xi = x - ht$.

Связывая параметрически эти уравнения, можно получить систему, для которой будут характерны как бризерное, так и решение в виде возврата ФПУ:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + (1 + \xi_0\cos u)\sin\varphi = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - 12u^2\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial^3 u}{\partial \zeta^3}(1 + \cos\varphi) = 0. \tag{7}$$

Очевидно, что одним из решений системы (7) будет бризер, имеющий не одну колебательную степень свободы, а спектр возврата ФПУ, причем, границы бризера будут

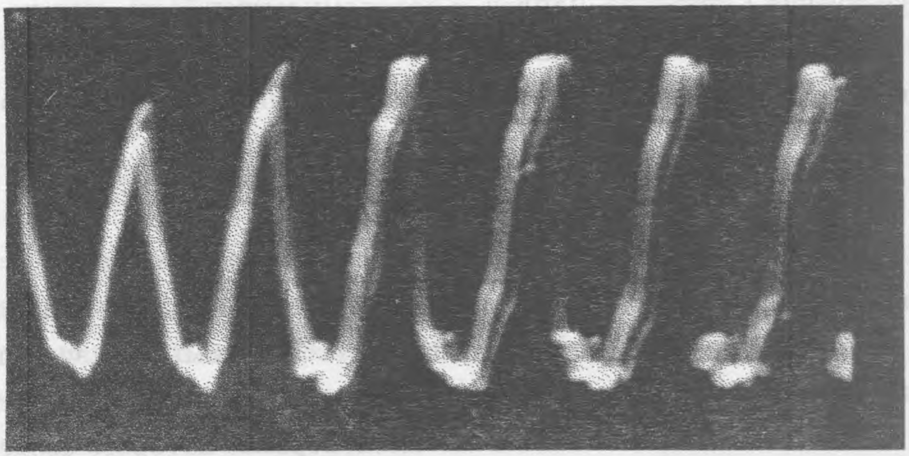

Рис. 1. *Результат аналогового моделирования параметрически связанных дискретных уравнений Гинзбурга–Ландау и КДВ. Вертикальная ось – В/см, горизонтальная ось – 0.01 мкс/см.*

служить граничными условиями для цепочки ФПУ. Моделируя параметрически связанные уравнения синус-Гордона и КДВ, например, в виде электромагнитно связанных цепочечных эквивалентов длинных линий [10], можно получить решение, аналогичное тому, которое было получено в работе Забуски и Крускала [9] с той лишь разницей, что цепочка солитонов уравнения КДВ наблюдается внутри бризера (рис. 1).

В данном случае условие Чирикова не выполняется и в спектре колебаний бризера будет происходить квазипериодическая перекачка энергии между высокочастотными и низкочастотными пакетами волн, то есть возврат ФПУ:

$$\sum_{i=1} A_i^2 \cos^2(\omega_i t - k_i x) = \sum_{j=1} A_j^2 \cos^2(\omega_j t - k_j x), \tag{8}$$

где A_i, A_j – амплитуды соответственно высокочастотных и низкочастотных волн в спектре ФПУ. Необходимым условием для существования такой перекачки энергии внутри бризера является равенство или превышение энергии бризера над энергией пакетов (8).

Необходимо отметить, что классическая цепочка возврата ФПУ (4) обладает существенными ограничениями в описании таких физических явлений как последовательность фазовых переходов в ферромагнетиках и сегнетоэлектриках, развитие турбулентности вниз по потоку, а также динамика цепочек, состоящих из автоколебательных систем. В целях качественного расширения предложенного подхода необходимо использовать уравнение Гинзбурга–Ландау, к которому может быть сведено возмущенное уравнение синус-Гордона с затуханием [11, 12]. Дискретная форма этого уравнения описывает коллективные возбуждения в ансамблях связанных автоструктур [12]:

$$\frac{da_j}{dt} = a_j(1 - \sigma|a_j|^2) + \gamma(a_j - a_{j-1}) + \chi(a_{j+1} - 2a_j + a_{j-1}), \tag{9}$$

где δ и χ в общем случае комплексны, γ определяет нелинейное затухание, $j = 1, 2, 3...n$.

Как было показано в работе [13], в полуограниченных цепочках (9) в зависимости от степени связи между элементами могут устанавливаться режимы независимых локальных возбуждений, режимы коллективных возбуждений в виде стационарных бегущих волн, а также стохастический режим автоколебаний, образом которого является странный аттрактор. Если цепочку Гинзбурга–Ландау ограничить размерами бризера, то все описанное разнообразие режимов будет наблюдаться внутри бризера. Данная модель может быть описана с помощью параметрически связанных уравнений Гинзбурга–Ландау и синус-Гордона

$$\frac{d^2y_j}{dt^2} = (y_{j+1} - y_j) - (y_j - y_{j-1}) + \frac{1}{3}(1 + ba_j)\left[(y_{j+1} - y_j)^3 - (y_j - y_{j-1})^3\right],$$

$$\frac{da_j}{dt} = a_j(1 - \sigma|a_j|^2) + \gamma(1 + cy_j)(a_j - a_{j-1}) + \chi(a_{j+1} - 2a_j + a_{j-1}), \tag{10}$$

где $b, c < 1$ – коэффициенты связи.

Физической моделью, которая реализует систему (10), являются цепочечные эквиваленты длинных линий, находящиеся на ферритовом сердечнике. В этом случае реализуется все богатство режимов, описываемых уравнением Гинзбурга–Ландау. На рис. 1 приведена аналоговая форма решения системы (10), представляющая собой бризер, внутри которого наблюдаются как возвраты ФПУ, так и переходы к стохастическим колебаниям, которые отражают динамику процессов в "островковой" структуре феррита.

Принимая во внимание, что спектр возврата ФПУ так же как и переход типа порядок-беспорядок, описываемый уравнением Гинзбурга–Ландау, обладают памятью к начальным условиям, описанный новый тип бризера может служить в качестве носителя больших объемов информации.

Такой тип бризера можно экспериментально реализовать, например, с помощью $2D$ лазера или лазера на потенциальных ямах при помощи двух связанных джозефсоновских линий передачи или с помощью связанных длинных линий с нелинейными элементами.

Автор выражает искреннюю признательность Мартину Крускалу за стимулирующую дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Маклафлин Д. Физическое описание спектрального преобразования. В кн. Нелинейные электромагнитные волны. М., Мир, 1983.

[2] Парментье Р. Флюксоны в распределенных джозефсоновских контактах. В кн. Солитоны в действии. М., Мир, 1981.

[3] Steiner M. Dynamics of one dimensional magnets.-in Physics in one dimension. Springer-Verlag, p. 140-151 (1981).

[4] Scott A. Americ. J. of Phys., 27, **1**, 52 (1979).

[5] Chirikov B. V. Phys. Rep., **52**, no. 5, 279 (1979).

[6] Абдуллаев Ф. Х., Хабибулаев П. К. Динамика солитонов в неоднородных конденсированных средах. Ташкент, Фан, 1988.

[7] Lichtenberg A. J., Lieberman M. A. Appl. Math. Sci, **8**, Springer-Verlag, 450 (1991).

[8] Fermi E., Pasta J., Ulam S. in Collected papers of Enrico Fermi, **2**, 978 (1955).

[9] Zubusky N. J., Kruskal M. D. Phys. Rev. Lett., **15**, 240 (1965).

[10] Longrenn K. E. Solitons in nonlinear transmission lines (Solitons inAction. Academic Press, New York San-Fracisco London), 307 (1978).

[11] Гапонов-Грехов А. В. с соавт. ДАН СССР, **282**, 106 (1984).

[12] Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. Автоструктуры, хаотическая динамика ансамблей. В кн. Нелинейные волны. М., Наука, 399 (1987).

[13] Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М. Письма в ЖЭТФ, **39**, вып. 12, 561 (1984).

Институт проблем нефти и газа РАН Поступила в редакцию 4 апреля 2001 г.