УДК 524.3,78:533.9.01

ЗАДАЧА ФРЕНЕЛЯ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ

Н. Г. Гусейн-заде[1], А. В. Кукушкин[2], А. А. Рухадзе[1]

Исследуется сходство и различие задачи Френеля – задачи об отражении и преломлении электромагнитных волн, в том числе и под углом Брюстера, и задачи возбуждения поверхностной электромагнитной волны (ПЭВ) на плоской поверхности проводящей среды.

Ключевые слова: задача Френеля, отражение и преломление волны, условие Брюстера для отсутствия отражения, полное преломление, поверхностная волна.

На сходство задачи Френеля и задачи возбуждения поверхностной электромагнитной волны (ПЭВ) на плоской поверхности проводящей среды указывалось уже давно, в частности в относительно недавней работе [1]. В ней было показано, что условие отсутствия отражения падающей из первой среды электромагнитной волны на поверхность второй среды (условие Брюстера) сводится к дисперсионному уравнению ПЭВ на границе раздела сред. В этом проявляется сходство. Различие же состоит в том, что ПЭВ распространяется только вдоль поверхности раздела сред и экспоненциально затухает в направлении, перпендикулярном к ней (т.е. ПЭВ в самих средах распространяться не может). В задаче же Френеля электромагнитная волна распространяется как в первой, так и во второй средах, но при выполнении условия Брюстера отраженной волны в первой среде нет и все поле сосредоточено во второй среде. Часто при этом волну во второй среде называют волной Брюстера. Следует подчеркнуть, что электромагнитное поле во второй среде при выполнении условия Брюстера сопутствует своему источнику (падающей волны), т.е. не может существовать без источника. В этом отличие ПЭВ, которая может оторваться от источника и распространяться уже без него (в отрыве от источника).

Постановка задачи. Рассмотрим классическую задачу: на плоскую полуограниченную поверхность однородной изотропной среды ($\varepsilon \neq 1$) из вакуума падает электромагнитная волна с частотой ω.

[1] ИОФ РАН, 119991 Россия, Москва ул. Вавилова, 38; e-mail: rukh@fpl.gpi.ru.

[2] Государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, 603600 Россия, Н. Новгород ул. Минина, 24.

Для описания среды воспользуемся формулой Друде [2]:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)} = \varepsilon_0 - \frac{\omega_p^2(\omega - i\nu)}{\omega(\omega^2 + \nu^2)} = \varepsilon' + i\varepsilon'', \qquad (1)$$

где ε_0 – диэлектрическая проницаемость среды в отсутствие носителей тока, ν – частота упругих столкновений носителей (обратное время релаксации импульса), а $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n/m}$ – плазменная частота; причем n – плотность этих носителей, m – их масса. П. Друде применял формулу (1) для описания металлов. А. Зоммерфельд, предсказавший существование поверхностной электромагнитной волны (ПЭВ) на поверхности проводящей среды [3], воспользовался этой формулой для описания как металлов, так и электролитов (морской воды). Его ученик Я. Ценник экспериментально доказал существование ПЭВ на плоской поверхности металла [4], хотя на проявление поверхностной электромагнитной волны на поверхности металла было указано еще в 1902 году Р. Вудом [5].

Именно на этих примерах возник ожесточенный спор в научной литературе об условиях существования поверхностной электромагнитной волны, который обострился в последние годы [6–9]. Вместе с тем, важно отметить, что формула Друде имеет ряд ограничений для описания тех или иных проводящих сред. В частности, для описания плазмы и электронного газа металлов она применима при выполнении неравенства [10]:

$$\omega_p^2 \gg \varepsilon_0 \nu^2. \qquad (2)$$

В этой среде самосогласованное волновое взаимодействие частиц преобладает над парным столкновительным взаимодействием, и существуют плазменные волны. В электролитах и морской воде имеет место обратное (2) условие и для описания этих сред уравнение Власова не применимо. Но отметим, что формулу (1) можно получить из уравнений двухжидкостной гидродинамики для носителей тока. Такими средами, в частности, являются электролиты и морская вода. Именно из-за невыполнения неравенства (2) оспаривается существование поверхностной волны в указанных средах и трактовка эксперимента Г. Маркони [11] по передаче радиосигнала через океан с помощью поверхностной электромагнитной волны Ценника.

Задача Френеля. Задача Френеля решается практически во всех учебниках по оптике (см., напр., [12]). Будем решать задачу аналогично [13] (см. рис. 1).

Пусть на плоскую поверхность (XY) изотропной диэлектрической среды с комплексной проницаемостью $\varepsilon \neq 1$, взятой в виде (1), из вакуума $(z < 0)$ падает E-волна (TM-

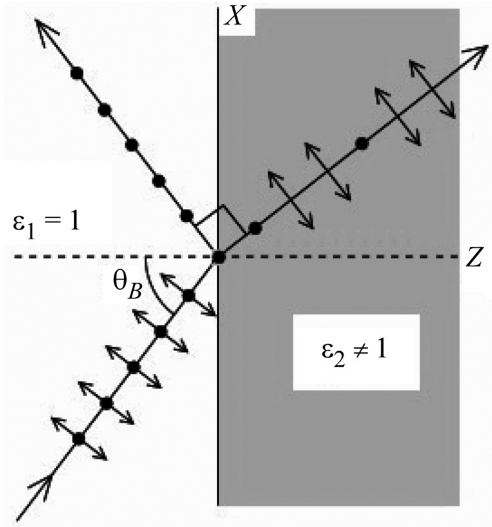

Рис. 1: *Падение волны под углом Брюстера. Ось 0Y направлена перпендикулярно плоскости рисунка.*

волна) с частотой ω и отличными от нуля компонентами поля E_x, E_z, B_y (в оптике такая волна называется волной, поляризованной в плоскости падения).

Уравнения поля сводятся к одному уравнению для компоненты $B_y = B_y(z)\exp(-i\omega t + ik_x x)$ [13]:

$$\varepsilon \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{dB_y}{dz}\right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - k_x^2\right) B_y = 0, \tag{3}$$

с решением (при $\varepsilon = \text{const}$):

$$B_y(z) = \begin{cases} B_y(0) \cdot \exp(kz), & z < 0; \\ B_y(0) \cdot \exp(-kz), & z > 0, \end{cases}$$

где $k^2 = k_x^2 - \varepsilon\omega^2/c^2$.

Эти выражения пригодны не только в среде с $\varepsilon \neq 1$, но и в вакууме ($\varepsilon \equiv 1$). При этом

$$E_x = -\frac{ic}{\omega\varepsilon}\frac{dB_y}{dz}, \;\; E_z = \frac{k_x c}{\omega\varepsilon} B_y. \tag{4}$$

В вакууме существуют падающая и отраженная волны, в то время как в среде – только прошедшая (преломленная) волна. Граничные условия связывают амплитуды этих волн:

$$E_{x,\text{ref}}(0) = R \cdot E_{x,\text{inc}}(0), \tag{5}$$

где R – коэффициент отражения по полю.

Опуская детали расчетов, приведем окончательные ответы [12, 13]:

$$R = \frac{\varepsilon(\omega)\sqrt{k_x^2c^2 - \omega^2} - \sqrt{k_x^2c^2 - \omega^2\varepsilon(\omega)}}{\varepsilon(\omega)\sqrt{k_x^2c^2 - \omega^2} + \sqrt{k_x^2c^2 - \omega^2\varepsilon(\omega)}}. \tag{6}$$

Здесь радикалы в числителе и знаменателе описывают распространение волн в вакууме и среде, причем если числитель обращается в нуль, то отраженная волна отсутствует (условие полного преломления или условие Брюстера [1, 12, 13]); а если нулю равен знаменатель, то это означает появление излучения соответствующей волны.

В первом случае (условие полного преломления)[1] излучение не происходит, и поле, создаваемое источником (падающей волной), не отрывается от источника. Условие Брюстера иногда ошибочно называют дисперсионным уравнением "волны Брюстера". Но это не есть волна.

Если радикалы в знаменателе имеют положительные действительные части, то поля отраженной и прошедшей в среду волн экспоненциально затухают в направлении, перпендикулярном к границе раздела вакуума-среды. И поэтому нуль знаменателя представляет собой дисперсионное уравнение поверхностной волны. Поскольку падающая волна распространяется в вакууме (по условию задачи), то первый радикал в числителе (6) всегда мнимый. Это означает, что одновременно числитель и знаменатель выражения (6) обращаться в нуль не могут. Это один из важных выводов настоящей статьи.

Поверхностная волна и условие Брюстера. Чтобы решить дисперсионное уравнение для поверхностной волны (равенство нулю знаменателя (6)), его сводят к виду [1, 6, 8, 9]:

$$k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega)+1}. \tag{7}$$

Заметим, что к этому соотношению сводится и условие Брюстера. Отличие состоит в их решении: при решении (7) как дисперсионного уравнения поверхностной волны мы должны соблюдать требование, **чтобы радикалы в (6) имели положительную действительную часть**, в то время как условие Брюстера по определению означает положительность мнимой части, по крайней мере, первого радикала в числителе.

Выпишем дисперсионное уравнение для поверхностной волны:

$$\varepsilon(\omega)\sqrt{k_x^2c^2 - \omega^2} + \sqrt{k_x^2c^2 - \omega^2\varepsilon(\omega)} = 0. \tag{8}$$

[1]Экспериментальные исследования показали, что закон Брюстера соблюдается недостаточно строго. В частности, коэффициент отражения E-волны (плоскополяризованной волны с колебаниями в плоскости падения) не обращается в нуль ни для какого угла падения, хотя при угле Брюстера он и очень мал [13]).

Далее мы ограничимся анализом этого уравнения только при условии $|\varepsilon(\omega)| \gg 1$. Именно этому условию удовлетворяют металлы и электролиты (морская вода) с диэлектрической проницаемостью (1). Отличие между ними состоит в том, что для металлов выполняется неравенство (2) и поэтому $\varepsilon' < 0$, а для электролитов имеет место обратное неравенство $\varepsilon' > 0$. Будем искать решение в виде $\omega = k_x c + \delta$, где δ – малая поправка. Из (8) при $\varepsilon'' \gg \varepsilon'$ получим [6]:

$$\omega \approx k_x c + \frac{k_x c(\varepsilon' + 1/4 - i\varepsilon'')}{2\varepsilon''^2} \approx k_x c + \frac{k_x c(\varepsilon' + 1/4 - i\varepsilon'')}{2|\varepsilon|^2}. \tag{9}$$

Решение (9) описывает затухание поверхностной волны при заданной длине волны во времени при распространении вдоль поверхности, т.е. является решением начальной задачи. Можно это решение записать также и в виде, соответствующем решению граничной задачи [6]:

$$k_x \approx \frac{\omega}{c} - \frac{\omega(\varepsilon' + 3/4 - i\varepsilon'')}{2c\varepsilon''^2} \approx \frac{\omega}{c} - \frac{\omega(\varepsilon' + 3/4 - i\varepsilon'')}{2c|\varepsilon|^2}, \tag{10}$$

и тогда оно будет описывать пространственное затухание падающей волны в среде с $\varepsilon' > 0$ при выполнении условия Брюстера вдоль направления распространения.

Аналогично можно трактовать решение (10) и для поверхностной волны, распространяющейся вдоль оси 0X (т.е. $k_x > 0$). Она затухает, но может существовать только при $\varepsilon' < 0$, т.е. на поверхности металлов. В противном случае первый радикал в (8) станет чисто мнимым и не будет затухать в поперечном направлении. Заметим, что во второй работе [6] этот случай отвергался из-за превышения групповой скоростью поверхностной волны скорости света в вакууме. При этом важно помнить, что мы решали уравнение (8) возведением его в квадрат и сведением к уравнению (7). Поэтому при проверке решения (9) путем его подстановки в уравнение (8) мы должны брать отрицательный знак перед первым радикалом (знак $\varepsilon' = \mathrm{Re}\,\varepsilon$). В то же самое время решение (9) при $\varepsilon' > 0$ справедливо для условия Брюстера (нуль числителя (6)) без изменения знака. Таким образом, поверхностная волна существует только в среде с $\varepsilon' < 0$, а условие Брюстера может выполняться только в среде с $\varepsilon' > 0$.

Выводы.

– **Поверхностная волна с фазовой скоростью, близкой к скорости света в вакууме, может существовать только на поверхностях сред с большой диэлектрической проницаемостью** ($|\varepsilon| \gg 1$) **и с отрицательной действительной частью** ε ($\mathrm{Re}\,\varepsilon = \varepsilon' < 0$).

К таким средам относятся, в частности, металлы, но ни в коем случае не морская вода. Поэтому эксперимент Г. Маркони оказался удачным только благодаря наличию ионосферы Земли, которая была предсказана О. Хэвисайдом в 1901 году (во время проведения эксперимента Г. Маркони), но была экспериментально открыта лишь в 1911 году.

– Условие Брюстера для сред с большой диэлектрической проницаемостью ($|\varepsilon| \gg 1$) может реализоваться только если действительная часть диэлектрической проницаемости положительна ($\varepsilon' > 0$). При этом условие Брюстера описывает не поверхностную электромагнитную волну, а поле, создаваемое источником (падающей на поверхность среды волной) и неотрывно связанное с источником.

Понятие полного преломления имеет важное значение для радиосвязи: большинство штыревых антенн излучает именно вертикально поляризованные волны. Таким образом, если волна падает на поверхность раздела (землю, воду или ионосферу) под углом Брюстера, отражённой волны не будет, соответственно канал связи будет отсутствовать.

Авторы надеются, что настоящая статья сможет положить конец бесконечному спору по этому вопросу [6–9].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 16–08–00859.

ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Н. Карташов, М. В. Кузелев, Физика плазмы **40** (8), 749 (2014).

[2] П. Друде, *Оптика* (Л.-М., ОНТИ, 1935).

[3] A. Sommerfeld, Math. Ann. **47**, 367 (1896); Ann. Physik **23**, 845 (1906); Ann. Phys., **28**, 665 (1909).

[4] J. Zenneck, Ann. Physik **3**, 846 (1907).

[5] Р. В. Вуд, *Физическая оптика* (Л.-М., ОНТИ, 1936).

[6] А. В. Кукушкин, УФН **179**, 801 (2009); А. В. Кукушкин, А. А. Рухадзе, К. З. Рухадзе, УФН **182**(4), 1205 (2012).

[7] В. Н. Дацко, А. А. Копылов, УФН **178**(1), 108 (2008); А. А. Копылов, Phys. Usp. **51**, 101 (2008).

[8] А. А. Рухадзе, К. З. Рухадзе, Инженерная физика № 4, 21 (2011); И. М. Минаев, А. А. Рухадзе, Инженерная физика № 3, 27 (2012).

[9] В. В. Шевченко, Журн. радиоэлектроники, № 7, http://jre. cplire/jr113/7/text. pdf; Радиотехника и электроника **60**, 358 (2015).

[10] Сб. “Об основополагающих работах А. А. Власова по физике плазмы и их обсуждение” под редакцией А. А. Рухадзе (М., изд. Научтехлитиздат, 2014).

[11] G. Marconi, Elect. World **38**, 1023 (1901).

[12] М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики* (М., Наука, 1970).

[13] А. Ф. Александров, А. А. Рухадзе, *Лекции по электродинамике плазмоподобных сред* (М., Физический факультет МГУ, 1999).

[14] Г. С. Ландсберг, *Оптика, 5-е изд.* (М., Наука, 1976).

Поступила в редакцию 12 мая 2015 г.