УДК 517.95: 53.091: 681.7.069.24

УСЛОВИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ИЗМЕНЕНИЯ МОДЫ ИЗЛУЧЕНИЯ

Б. В. Мелкумян[1,2]

Исследовано неоднородное волновое уравнение для определения экспериментально обнаруженного ранее изменения фазы излучения в ускоренном резонаторе с неподвижным содержимым. Показано, что фаза излучения не зависит от однородной среды, заполняющей ускоренный резонатор с неизменной структурой фазы. Обсуждаются необходимые и достаточные условия существования нетривиальных решений уравнения

Ключевые слова: волновое уравнение, действие, резонатор, ускорение, фаза, энергия.

Введение. Данная работа продолжает теоретическое обоснование динамического изменения моды излучения "линейного лазерного резонатора" при его ускоренном движении.

Наблюдалось изменение интенсивности излучения и появление дополнительных, не дифракционных, пучков при движении резонатора [1].

В дальнейшем были созданы прототипы автономного резонаторного датчика (АРД) ускоренного движения объекта. Это лазерный акселерометр нового типа на основе линейного лазера, основанный на представленной теории [2–5].

Решение выводимого в настоящей статье уравнения частично приведено в [3–5] и согласуется с наблюдениями. Подробное решение готовится к публикации.

Целью данной работы является определение необходимых и достаточных условий для существования нетривиальных решений уравнения движения электромагнитного поля без зарядов под действием внешних сил, которые одновременно сдвигают элементы обрамления излучения, источники излучения поля, резонатор и фотоприёмник.

Принимаем, что среда в резонаторе однородная, электро-нейтральная, с постоянными диэлектрической и магнитной проницаемостями (ε; $\mu = \text{const}$).

[1] ИОФ РАН, 119991 Россия, Москва, ул. Вавилова, 38; e-mail: bgo@bk.ru.

[2] Московский университет им. С. Ю. Витте, 115432 Россия, Москва, 2-й Кожуховский проезд, д. 12.

Замена переменных. Мы рассматриваем линейный лазерный резонатор из жёстких элементов, неподвижных друг относительно друга при движении. Считаем, что для подобной системы выполняются преобразования Галилея для времени и координат:

$$t = t_0; \tag{1}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{S}(t). \tag{2}$$

В (1) и (2) обозначены: время и радиус-вектор произвольной точки резонатора относительно ускоренной и инерциальной систем координат, как $(t; \mathbf{r})$ и $(t_0; \mathbf{r}_0)$ соответственно; а вектор $\mathbf{S}(t)$ – перемещение относительно инерциальной системы. Рассматриваем случай с малыми скоростями, поэтому время в системах одинаково.

Соотношения (1) и (2) определяют замену переменных и операторов в волновом уравнении для электромагнитного излучения [6]. Оператор набла в собственной системе отсчёта резонатора останется равным оператору набла в инерциальной системе:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} = \vec{\nabla}_0. \tag{3}$$

Производная по времени в собственной (ускоренной) системе отсчёта резонатора выражается через производную в инерциальной системе отсчёта, как

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}_0} + \left(\dot{\mathbf{S}}(t) \cdot \vec{\nabla}_0\right). \tag{4}$$

В неподвижном резонаторе уравнение (5) для фазы (Φ_0) поля без зарядов, т.е.

$$\Delta_0 \Phi_0 = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial t^2}, \tag{5}$$

с учётом (3) и (4), примет вид (6) для фазы (Φ) электромагнитного поля без зарядов в резонаторе, движущемся с ускорением относительно инерциальной системы отсчёта:

$$\Delta_0 \Phi = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \left(\dot{\mathbf{S}}(t) \cdot \vec{\nabla}_0\right) \right\}^2 \Phi. \tag{6}$$

Уравнение (6) записано относительно собственной системы отсчёта резонатора, но через переменные величины системы инерциального наблюдателя.

Преобразования действия и энергии. Уравнение (6) содержит несколько неизвестных функций: это фаза Φ и три независимые (движение произвольно) координаты вектора перемещения $S_x(t)$; $S_y(t)$; $S_z(t)$. Для определения зависимости фазы от вектора перемещения необходимо три, по числу базисных решений, уравнения связи фазы и координат вектора перемещения.

Здесь мы не рассматриваем случаев обмена энергии излучения с материалом резонатора и приводим лишь уравнения для излучения при нулевых граничных условиях.

Первое дополнительное уравнение связи отражает закон сохранения энергии при перемещении (резонатора с излучением) в операторном виде:

$$\hat{E} = \hat{E}_0 - \left(\dot{\mathbf{S}}(t) \cdot \hat{\mathbf{P}}\right). \tag{7}$$

В (7) операторы $\hat{E}$ и $\hat{E}_0$ определяют энергию электромагнитного поля в неравномерно движущемся резонаторе и в системе инерциального наблюдателя соответственно, $\hat{\mathbf{P}}$ – оператор импульса в собственной системе отсчёта резонатора, а первая производная по времени $\dot{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{v}(t)$ – это непостоянная скорость резонатора относительно инерциальной системы отсчёта.

Впервые уравнение (7), но не в операторном виде, а как функциональное соотношение, предложили применить для анализа явлений в кольцевом лазере в [7, 8], но практических результатов получено не было.

Второе дополнительное уравнение связи даёт формула (8) для преобразования действия при линейном (не вращательном) перемещении в операторном виде [1]:

$$A(t; \mathbf{r}) = A(0; \mathbf{r}) + (\mathbf{S}(t) \cdot \hat{\mathbf{P}}). \tag{8}$$

В (8) функция $A(t; \mathbf{r})$ – это действие излучения в собственной системе отсчёта при её неравномерном движении, $A(0; \mathbf{r})$ – действие излучения в начальный момент времени, до перемещения ($t = 0$), остальные обозначения – как в (2) и (7).

Предположение: При нерелятивистском перемещении любой физической системы (частицы или поля), имеющей собственные значения импульса и определённые граничные условия, её энергия изменяется согласно (7), а действие – согласно (8).

Известно, что величины действие (A) и фаза (Φ) фотона связаны, как энергия (E) и круговая частота (ω) фотона:

$$A(t; \mathbf{r}) = \hbar \cdot \Phi(t; \mathbf{r}). \tag{9}$$

В (9) величина $\hbar$ – это постоянная Дирака ($\approx 1.054571727 \cdot 10^{-34}$ Дж·с).

Функции фазы $\Phi(t; \mathbf{r})$ и частоты $\omega(t; \mathbf{r})$ определяют распределение излучения в резонаторе. В соотношениях (7) и (8) оператор импульса, с учётом (3), равен

$$\hat{\mathbf{P}} = -i\hbar \cdot \vec{\nabla} = -i\hbar \cdot \vec{\nabla}_0. \tag{10}$$

Общие собственные функции уравнений (6), (7) и (8) ищем в виде векторов

$$\mathbf{E}_{\pm} = \mathbf{E}_0 \cdot \exp[\mp i \cdot \Phi(t;\mathbf{r})], \tag{11}$$

где $\mathbf{E}_{\pm}$ – векторы напряжённости электрического поля, которое распространяется "по" (знак + в индексе) или "против" (знак − в индексе) положительного направления системы отсчёта резонатора. Для этих функций (11) уравнение (7) примет вид

$$\dot{\Phi}(t;\mathbf{r}) \pm (\dot{\mathbf{S}} \cdot \vec{\nabla}_0)\Phi(t;\mathbf{r}) = \omega(t;\mathbf{r}). \tag{12}$$

Так же, в единицах $\hbar$, соотношение (8) примет вид уравнения

$$\Phi(t;\mathbf{r}) = \Phi(0;\mathbf{r}) \mp (\mathbf{S}(t) \cdot \vec{\nabla}_0)\Phi(t;\mathbf{r}), \tag{13}$$

где, как и в (11), (12), знаки соответствуют направлению распространения волн. В (12) учтено, что оператор энергии в инерциальной системе отсчёта определяется, как

$$\hat{E}_0 = i\hbar \cdot \frac{\partial}{\partial t}. \tag{14}$$

Из (6), (12) и (13) мы получили уравнение состояния излучения ускоренного резонатора, чтобы определить совместные собственные функции и собственные значения в зависимости от вектора перемещения $\mathbf{S}(t)$ с ненулевым ускорением.

Можно показать, что при нулевом ускорении резонатора уравнения (6), (12) и (13) определяют доплеровские частоты относительно инерциального наблюдателя [3].

Уравнение состояния излучения ускоренного резонатора в однородной среде. Получим уравнение состояния излучения ускоренного резонатора в однородной среде. Для этого, с учётом (12) для положительных волн ($\mathbf{E}_+$), преобразуем (6):

$$\Delta_0\Phi(t;\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\left\{\frac{\partial}{\partial t} + (\dot{\mathbf{S}} \cdot \vec{\nabla}_0)\right\}\omega(t;\mathbf{r}) =$$

$$= \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[\dot{\Phi}(t;\mathbf{r}) + \left(\dot{\mathbf{S}} \cdot \vec{\nabla}_0\right)\Phi\right] + \left(\dot{\mathbf{S}} \cdot \vec{\nabla}_0\right)\left[\dot{\Phi}(t;\mathbf{r}) + \left(\dot{\mathbf{S}} \cdot \vec{\nabla}_0\right)\Phi\right]\right\}, \tag{15}$$

или, раскрыв квадратные скобки в правой части (15), приведём его к виду

$$\Delta_0\Phi = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\left\{\ddot{\Phi} + (\ddot{\mathbf{S}} \cdot \vec{\nabla}_0)\Phi + 2 \cdot (\dot{\mathbf{S}} \cdot \vec{\nabla}_0)\dot{\Phi} + (\dot{\mathbf{S}})^2 \cdot \Delta_0\Phi\right\}. \tag{16}$$

Дальнейшими преобразованиями (16) избавимся от коэффициента ($\varepsilon\mu/c^2$), который определяет "высокочастотную" часть фазы и зависимость состояния излучения в однородном ускоренном резонаторе от среды.

Заменим фазу в правой части уравнения (16), в слагаемом $(\ddot{\mathbf{S}} \cdot \vec{\nabla}_0)\Phi$, на величину (13), а первую частную производную фазы по времени в слагаемом $2 \cdot (\dot{\mathbf{S}} \cdot \vec{\nabla}_0)\dot{\Phi}$ – на величину из (12). Получим эквивалентное (6), (12) и (13) соотношение:

$$\Delta_0\Phi = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\left\{\ddot{\Phi} + (\ddot{\mathbf{S}} \cdot \vec{\nabla}_0)[\Phi(0;\mathbf{r}) - (\mathbf{S} \cdot \vec{\nabla}_0)\dot{\Phi}] + 2(\dot{\mathbf{S}} \cdot \vec{\nabla}_0)[\omega - (\dot{\mathbf{S}} \cdot \vec{\nabla}_0)\Phi] + (\dot{\mathbf{S}})^2\Delta_0\Phi\right\}. \tag{17}$$

Преобразуем (17), сгруппировав справа слагаемые с лапласианом, в уравнение:

$$\Delta_0\Phi = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\left\{\ddot{\Phi} - [(\ddot{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{S}) + (\dot{\mathbf{S}})^2] \cdot \Delta_0\Phi + 2(\dot{\mathbf{S}} \cdot \vec{\nabla}_0)\omega + (\ddot{\mathbf{S}} \cdot \vec{\nabla}_0)\Phi(0;\mathbf{r})\right\}. \tag{18}$$

Во втором слагаемом правой части (18) преобразуем коэффициент при лапласиане:

$$[(\ddot{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{S}) + (\dot{\mathbf{S}})^2] = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt}(2 \cdot (\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{S}})) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{dt^2}(S^2), \tag{19}$$

где S – модуль вектора $\mathbf{S}$. Учитывая (19), приравняем лапласианы в (18) и (6):

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\left\{\frac{\partial}{\partial t} + (\dot{\mathbf{S}} \cdot \vec{\nabla}_0)\right\}\omega = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\left\{\ddot{\Phi} - \frac{1}{2}\ddot{S}^2 \cdot \Delta_0\Phi + 2(\dot{\mathbf{S}} \cdot \vec{\nabla}_0)\omega + (\ddot{\mathbf{S}} \cdot \vec{\nabla}_0)\Phi(0;\mathbf{r})\right\}. \tag{20}$$

Сократив коэффициенты и сгруппировав слагаемые в (20), получим волновое уравнение состояния электромагнитного излучения в ускоренном резонаторе:

$$\ddot{\Phi} - \frac{1}{2} \cdot \ddot{S}^2 \cdot \Delta_0\Phi = \dot{\omega} - (\dot{\mathbf{S}} \cdot \vec{\nabla}_0)\omega - (\ddot{\mathbf{S}} \cdot \vec{\nabla}_0)\Phi(0;\mathbf{r}). \tag{21}$$

Ранее в [5] решение уравнения (21) для фазы излучения в прямоугольном резонаторе, движущемся с постоянным ускорением $\vec{a}$, приводилось в виде

$$\Phi_{\pm} = \left[\omega_0 t - \left(\frac{\vec{a} \cdot t^2}{2} \cdot \vec{\nabla}\right)\Phi(0;\vec{r}\right] \mp i \cdot \left[T(t) \cdot \sin(\vec{\Xi} \cdot \vec{r}) + \frac{a^2t^4}{6}\Xi^2\right]. \tag{22}$$

В (22) функция $T(t)$ – это временная часть решения однородного уравнения для фазы [3–5], когда в (21) правая часть равна нулю; знаки $(\pm;\mp)$ соответствуют двум разрешённым направлениям излучения для каждой моды линейного резонатора; $\vec{\Xi}$ – вектор излучения из [4], который определяется собственными значениями пространственной части решения однородного уравнения для (21).

Решение для (21) имеет упрощённый вид (22), если в однородном уравнении для частоты из [5] считать, что собственные значения v_0 – действительные числа. Запишем теперь однородное уравнение для частоты с разделёнными переменными в виде:

$$\frac{\ddot{\omega}_{0t}}{\omega_{0t}} + \frac{\dot{\omega}_{0t}}{t \cdot \omega_{0t}} = -\frac{(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\omega_{0r}}{\omega_{0r}} = \pm i v_0^2. \tag{23}$$

В таком случае, при выполнении (23), можно показать, что решения уравнения (21) для фазы излучения в ускоренном резонаторе определяет формула (24), в которой однородное и частное решения имеют один и тот же множитель пространственной части:

$$\Phi_{\pm}(t;\vec{r}) = \omega_0 t \left\{ 1 + \left(\frac{v_0 t}{2}\right)^2 \left[\sum_{m=0}^{\infty} j_{0;m} \left(\frac{v_0^2 t^2}{2}\right) \cdot \left(\frac{m!}{(2m+1)!}\right)^2 \right] \cdot \sin(\vec{\Xi} \cdot \vec{r}) \right\} -$$
$$-(\vec{S}(t) \cdot \vec{\nabla}_0) \cdot \Phi(0;\vec{r}) \mp$$
$$\mp i \left\{ \omega_0 t \left[\sum_{m=0}^{\infty} j_{0;m} \left(\frac{v_0^2 t^2}{2}\right) \cdot \left(\frac{m!}{(2m)!}\right)^2 \right] + T(t) + \frac{2}{3} \cdot (\vec{S}(t))^2 (\vec{\Xi})^2 \right\} \cdot \sin(\vec{\Xi} \cdot \vec{r}), \quad (24)$$

где

$$v_0^2 = (\vec{\Xi} \cdot \vec{a}) = \text{const}. \quad (25)$$

Выразив функцию Бесселя нулевого порядка в виде ряда, как

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k! \cdot \Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} j_{0;k}(z), \quad (26)$$

увидим, что величина $j_{0;m}$ в (24) равна члену ряда (26), когда аргумент $z = \dfrac{v_0^2 t^2}{2}$.

Условия динамического изменения состояния излучения резонатора. Некоторые выводы о необходимых и достаточных условиях существования явлений оптодинамики, обнаруженных экспериментально, можно сделать до решения уравнения (21). Сформулируем теоремы о существовании собственных значений фазы и частоты излучения, зависящих от ускорения резонатора.

Теорема 1: Необходимым и достаточным условием существования нетривиального решения ($\Phi(\vec{\Xi};\mathbf{a}) \neq 0$) является существование совместного решения для (6), (12) и (13).

Теорема 2: Решение $\Phi(\vec{\Xi};\mathbf{a};t;\mathbf{r})$ уравнений (6), (12) и (13) не зависит от однородной среды, заполняющей ускоренный резонатор с неизменной структурой фазы.

Теорема 3: Решение $\Phi(\vec{\Xi};\mathbf{a};t;\mathbf{r})$ уравнения (21) максимально изменяется при движении резонатора вдоль градиента фазы и минимально изменяется при движении резонатора перпендикулярно градиенту фазы.

Выводы. Сформулированы теоремы о необходимых и достаточных условиях существования собственных значений фазы и частоты, зависящих от ускорения резонатора.

Пространственные части решений однородной и неоднородной задачи для фазы излучения при ускоренном движении резонатора не отличаются.

Изменение фазы излучения при ускоренном движении резонатора с неизменной структурой фазы не зависит от однородной среды, заполняющей резонатор.

Практической целью работы является создание лазерных датчиков и систем измерения параметров движения нового типа на их основе. Прототипы датчиков ускорения нового типа демонстрировались на конференциях SPIE NDTCS-2001 и SPIE Aero-Science-15 (Orlando) и в ряде организаций.

Автор высоко ценит активные обсуждения и ценные замечания, высказанные участниками семинаров, на которых обсуждались представленные результаты, в том числе: участниками семинара отдела теоретической физики в ИОФ им. А. М. Прохорова РАН и участниками семинара кафедры теории функций и функционального анализа мехмата МГУ им. М. В. Ломоносова.

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] B. V. Melkoumian, "Dynamic changing of laser radiation mode", *Proceedings of the 11th Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics*. Ed. V. A. Bityurin (Moscow, JIHT RAS, 2012), pp. 366-372.

[2] Б. В. Мелкумян, Инженерная физика, № 4, 13 (2011).

[3] B. V. Melkoumian, "Classical theory of autonomous laser accelerometer". SPIE paper 6736-12, pp. 67360D-1 – 67360D-9, (2007).

[4] B. V. Melkoumian, Bulletin of the Lebedev Physics Institute **41**, 35 (2014).

[5] B. V. Melkoumian, Bulletin of the Lebedev Physics Institute **41**, 181 (2014).

[6] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля* (М., Наука, 1973).

[7] C. V. Heer, Physical Review **134**, A799 (1964).

[8] Н. М. Померанцев, Г. В. Скроцкий, Успехи физических наук, **100**, вып. 3, 361 (1970).

Поступила в редакцию 16 декабря 2015 г.