

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИОННО-ЗВУКОВОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В МОДЕЛИ Б. Б. КАДОМЦЕВА

В. Ю. Попов^{1,2}, В. П. Силин^{3,4}, А. А. Белов¹

Настоящее сообщение посвящено обсуждению свойств двух сравнительно давно предложенных Б. Б. Кадомцевым уравнений для нелинейной теории ионно-звуковой турбулентности плазмы и некоторых результатов их решений. К этим уравнениям мы будем относиться как объектам математической физики, сосредоточивая свое внимание как на подходе к их изучению, так и на возникающих при этом численных результатах.

Ключевые слова: ионно-звуковая турбулентность, нелинейные уравнения Кадомцева, нестационарные решения.

Первое уравнение. В 1964 году Б. Б. Кадомцев опубликовал свое первое из обсуждаемых ниже в этом сообщении двух уравнений для описания нестационарного поведения ионно-звуковой турбулентности (ИЗТ) [1]. Это уравнение было получено его автором для того случая, когда эволюция ИЗТ в токовой плазме, состоящей из электронов и одного сорта ионов, определяется благодаря ионно-звуковой неустойчивости, порождаемой электронами тока, движимыми электрическим полем с электрической напряженностью \vec{E} , которые по предположению автора возбуждают турбулентные пульсации с используемой им спектральной функцией $I_{\vec{k}}$ в узком интервале углов около направления вектора \vec{E} . Последнее предположение позволяет рассматриваемую задачу свести к одномерной, когда $I_k = \int d\Omega_{\vec{k}} I_{\vec{k}}$, где интеграл берется практически по узкому интервалу углов, а k – модуль волнового вектора турбулентных пульсирующих ионно-

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Россия; e-mail: masterlu@mail.ru.

² Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Финуниверситет), 125993 Россия, Москва, Ленинградский проспект, 49.

³ ФИАН, 119991 Россия, Москва, Ленинский пр-т, 53; e-mail: silin@sci.lebedev.ru.

⁴ Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, 115409 Россия, Москва, Каширское шоссе, 31.

звуковых волн. Тогда динамика эволюции ИЗТ по Кадомцеву состоит в генерации ионно-звуковых волн согласно механизму черенковского излучения и в стабилизации роста нарастающих при этом пульсаций благодаря индуцированному рассеянию ионно-звуковых волн на ионах. Наконец, обозначая θ_s угол между векторами \vec{k} и \vec{k}' волн, взаимодействующих благодаря индуцированному рассеянию, а также полагая $\langle \theta_s \rangle^2 = \theta_0^2$, Б. Б. Кадомцев представил в работе [1] первое из двух интересующих нас уравнений в виде:

$$\frac{\partial I_k}{\partial t} = 2\gamma_k I_k + A I_k \left(2k^5 \frac{\partial I_k}{\partial k} + 6k^4 I_k \right). \quad (1)$$

Здесь в используемом в [1] приближении длинных волн имеем: $\gamma_k = \alpha k$, а α – постоянная. В том же приближении частота ионно-звуковых волн имеет вид $\omega = kV_S$, где $V_S = \sqrt{\kappa T_e/m_i}$ – скорость длинноволнового ионного звука. Наконец, используется обозначение

$$A = (\omega_{Li}^2 \kappa T_i \theta_0^2 / 2V_S \kappa^2 T_e^2 n), \quad (2)$$

где $\omega_{Li} = \sqrt{4\pi e^2 n/m_i}$ – ионная ленгмюровская частота. Автор работы [1] определяет энергию ионно-звуковых волн $W(k, t)$ формулой (IV, 19)

$$W(k, t) = (e^2 n/m_i T_e) I_k \quad (3)$$

и предлагает записать уравнение (1) в представляющемся ему более наглядном виде, могущем быть интерпретированным как уравнение переноса волновой энергии:

$$\frac{\partial I_k}{\partial t} - \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial k} (A k^7 I_k^2) = 2\gamma_k I_k - A k^4 I_k^2. \quad (4)$$

Вот как о такой возможной интерпретации в связи с уравнением (4) в работе [1] было написано: “Второй член слева описывает диффузионный перенос энергии в сторону меньших волновых чисел за счет рассеяния волн на ионах, а второй член справа описывает нелинейное затухание волн на ионах”.

Уравнение (4) в случае стационарного независящего от времени состояния турбулентности имеет следующее решение:

$$I_k = (\alpha/Ak^3) \ln(1/k r_{De}). \quad (5)$$

Этот результат Б. Б. Кадомцева и В. И. Петвиашвили породил квазистационарную теорию ИЗТ. Такой спектр ионно-звуковой турбулентности несколько раньше был опубликован В. И. Петвиашвили [2], учеником Б. Б. Кадомцева, и получил название спектра

Кадомцева–Петвиашвили. В формуле (5) возникновение дебаевского радиуса электронов r_{De} обусловлено тем, что Кадомцев использует приближение $1 > kr_{De}$.

Второе уравнение. Второе уравнение Б. Б. Кадомцев предложил несколько позже в своей книге “Коллективные явления в плазме, М., Наука (1976 г.)” [3], повторив это во втором издании 1988 г. [4]. В своем подробном изложении он пишет, что в интервал волновых векторов вблизи значения k “кванты” приходят из области $k + \Delta k$ и уходят от значения k в область $k - \Delta k$. Поэтому процесс переноса принимает характер потока в k -пространстве с интенсивностью $\approx \Delta k \partial N_k / \partial k$ (здесь N_k считается плотностью числа волн на интервал dk абсолютных значений волновых векторов, так что $dW = c_s k N_k dk$). Соответственно этому Б. Б. Кадомцев по порядку величины предлагает свое второе уравнение, левая часть которого сохраняет, как он полагает, число волн, в виде:

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial k}(Pk^4 N_k^2) = 2\alpha k N_k. \quad (6)$$

Правая часть формулы (6) отвечает черенковской накачке волн из-за неустойчивости. Для случая стационарной турбулентности при $\partial N_k / \partial t = 0$ имеем

$$N_k = (\alpha / Pk^2) \ln(1 / kr_{De}). \quad (7)$$

Таким образом, энергия турбулентных шумов

$$W(k) = \omega_k N_k \approx (\alpha V_s / Pk) \ln(1 / kT_{De}) \quad (8)$$

оказывается большей в области малых волновых векторов, несмотря на то, что большая накачка имеет место при наибольших волновых векторах, то есть при $kr_{De} = 1$.

Универсальное уравнение. После такого напоминания, переходя теперь к цели нашего сообщения, заключающейся в численном описании нестационарной эволюции ИЗТ, используем далее следующие обозначения

$$x = kr_{De}, \quad \tau = t(2\alpha / r_{De}), \quad I_k(t) = \frac{\alpha r_{De}^3}{Ax^3} y(x, \tau) \quad (9)$$

для преобразования уравнений (1) и (4) к универсальному виду

$$\frac{\partial y(x, \tau)}{\partial \tau} = xy + x^2 y \frac{\partial y}{\partial x}. \quad (10)$$

Слово “универсальный” мы используем пока лишь в том смысле, что уравнение (10), для которого мы будем решать задачу Коши, не содержит никаких параметров. Стационарное и, как нетрудно показать, устойчивое решение уравнения (10), подобное формуле

(5) и изображенное на вставке к рис. 1, имеет вид $y_s(x) = \ln(1/x)$, отвечающий принятому Кадомцевым условию $1 > kr_{De}$. В свете этого при решении уравнения (10) будем использовать это граничное условие $y(1, \tau) = 0$. Второе граничное условие Кадомцев связывает с необходимостью “обрыва” при $x_{\min} \ll 1$. Расширение области волновых векторов от $x_{\max} = 1$ до $x_{\min} \ll 1$ при нашем решении задачи Коши для уравнения (10) отвечает расширению области допустимых в нашем описании малых значений волновых векторов турбулентных пульсаций, что будет отвечать росту времени τ применимости нашего решения задачи Коши.

Подобно проделанному для первого уравнения Кадомцева обратимся теперь ко второму уравнению (6). Для его преобразования используем следующие сходные обозначения: $x = kr_{De}$, $\tau = 2\alpha t/r_{De}$, $N_k = (\alpha\psi/Pk^2)$. Тогда уравнение (6) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial\psi(x, \tau)}{\partial\tau} = x\psi + x^2\psi\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

что в точности совпадает с уравнением (10). Тем самым название “универсальное” для уравнения (10) приобретает новый смысл. А именно, к уравнению (10) сводится как первое, так и второе уравнение Б. Б. Кадомцева. Поэтому рассмотрение свойств решений уравнения (10) позволит нам понять свойства решений как первого, так и второго уравнений Б. Б. Кадомцева. Однако есть и другая возможность – уравнение может быть одно. На это намекает нам универсальное уравнение. Для того чтобы убедиться в том, что реализуется именно вторая возможность, подставим выражение $N_k = kJ_k$ в уравнение (6). Это дает

$$\frac{\partial J}{\partial t} = 2\gamma_k J_k + P \left(6k^4 J_k^2 + 2k^5 J_k \frac{\partial J_k}{\partial k} \right).$$

Полученное уравнение сравниваем с уравнением (1):

$$\frac{\partial I_k}{\partial t} = 2\gamma_k I_k + AI_k \left(2k^5 \frac{\partial I_k}{\partial k} + 6k^4 I_k \right).$$

Очевидно отличие полученного уравнения от (1) первого уравнения Б. Б. Кадомцева лишь обозначениями. Поэтому можно успокоиться и считать, что два уравнения Кадомцева эквивалентны, а на обыденном языке уравнение одно. И вот в каком смысле. Отметим причины внешнего отличия уравнений (1) и (6). Их две, во-первых, $W(k, t) = kV_S N_k(t)$, а во-вторых, если при написании уравнения (6) его автор четко пишет, что при этом N_k – плотность числа волн в элементе dk , то в случае первого уравнения Кадомцева возникающая там плотность числа волн оказывается в элементе $k^2 dk$ в результате поиска непротиворечивости. Вот и все о подстановке $N_k = kJ_k$.

Некоторые результаты численных решений уравнения Кадомцева. Их мы представим с помощью решений уравнения (10). Итак, численно решаем уравнение

$$\frac{\partial y(x, \tau)}{\partial \tau} = xy + x^2 y \frac{\partial y}{\partial x}, \quad x \in [x_0, 1], \tau > 0 \quad (1a)$$

с начальным условием

$$y(x, 0) = y_0(x) \quad (2a)$$

и краевым условием

$$y(1, \tau) = 0 \quad (3a)$$

Для численного счета, результаты которого приведены ниже, использовались начальные условия

$$y_0(x) = 10^{-6}(\ln x / \ln x_0) \text{ и } x_0 = 0.05. \quad (4a)$$

Результаты расчетов и их обсуждение. Наше обсуждение проведем в связи с представленными далее рисунками.

Приведем здесь график стационарного решения уравнения (10) в правом верхнем углу рис. 1. Кривая этого рисунка как предельная граница области фазового пространства (x, y) , заполняющейся “под” ней волной турбулентных пульсаций, является существенным элементом представляемой нами картины.

Наше обсуждение начнем с рис. 1. Изображаемую на нем картинку назовем “Волна допустимого уравнения Кадомцева втекания с укрупнением и квазискачком”. Можно искать здесь “подобие” течению в двумерном расширяющемся вверх сопле. На рисунке изображены “мгновенные снимки” численного решения (1a)–(4a) в равноотстоящие промежутки времени $\tau = 15, 16, \dots, 37$. Значению $\tau = 15$ отвечает самая правая нижняя кривая, отвечающая «втеканию» через правый нижний угол фазового пространства (x, y) . Значению $\tau = 37$ отвечает самая левая кривая с вертикальным левым фронтом, соответствующая граничному условию Кадомцева обрезания спектра турбулентности в области длинных волн. Все кривые выходят справа из точки $(1, 0)$ и в верхней части постепенно выходят на стационарное решение $y_s(x) = \ln(1/x)$, которому отвечает верхняя сплошная кривая. В эволюции волны представлены как участок ее укрупнения, так и сравнительно долгий участок движения с квазискачком. Уменьшение расстояния, проходимого фронтом за одинаковые промежутки времени (сгущение вертикальных линий), мы интерпретируем как замедление движения “втекания скачка”.

На рис. 1 плохо различима эволюция волны в начале ее втекания. Устранению этого недостатка посвящен рис. 2, на котором виден реализующийся на ранних временах

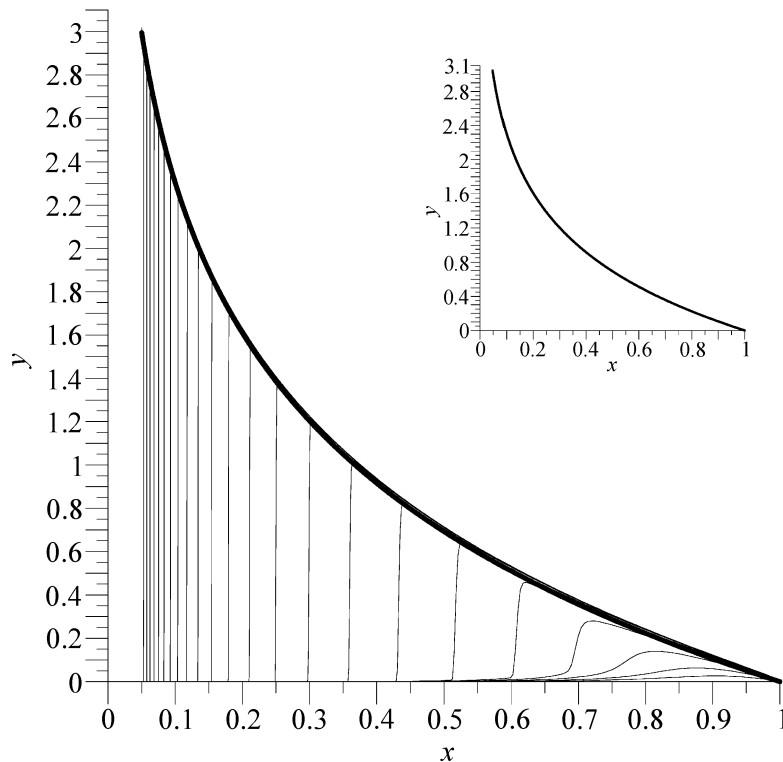


Рис. 1: Волна “втекания” в допустимую уравнением Кадомцева область фазового пространства (x, y) в моменты времени $\tau = 15, 16, \dots, 37$, $\tau = 15$ – правая нижняя кривая. Вставка: стационарное решение уравнения (10) – граница такой области.

втекания нелинейной, несущей турбулентность волны, режим растекания, а чуть позже режим устремления к верхней границе.

На рис. 2 изображены “мгновенные снимки” численного решения (1а)–(4а) в равноотстоящие моменты времени $\tau = 10, 11, \dots, 15$. Значению $\tau = 10$ отвечает самая нижняя кривая. Значению $\tau = 15$ – самая верхняя. Этот рисунок демонстрирует перемещение с ростом τ волны турбулентных пульсаций в область меньших волновых векторов « x » и устремление в сторону больших интенсивностей “ y ”.

Остановимся теперь на описании уравнением Б.Б. Кадомцева выхода на квазистационарное турбулентное состояние Кадомцева–Петвиашвили. Для этого приведем здесь рис. 3, демонстрирующий зависимость от безразмерного времени τ величины заполняемой ионно-звуковыми турбулентными пульсациями безразмерной площади S двумерного фазового пространства (x, y) . Рисунок 3 выполнен в духе надежды Б. Б. Кадомцева на то, что время установления найденного им стационарного состояния невелико. Рис. 3 изображает зависимость от τ “площади” S фазового пространства, заполняемой турбу-

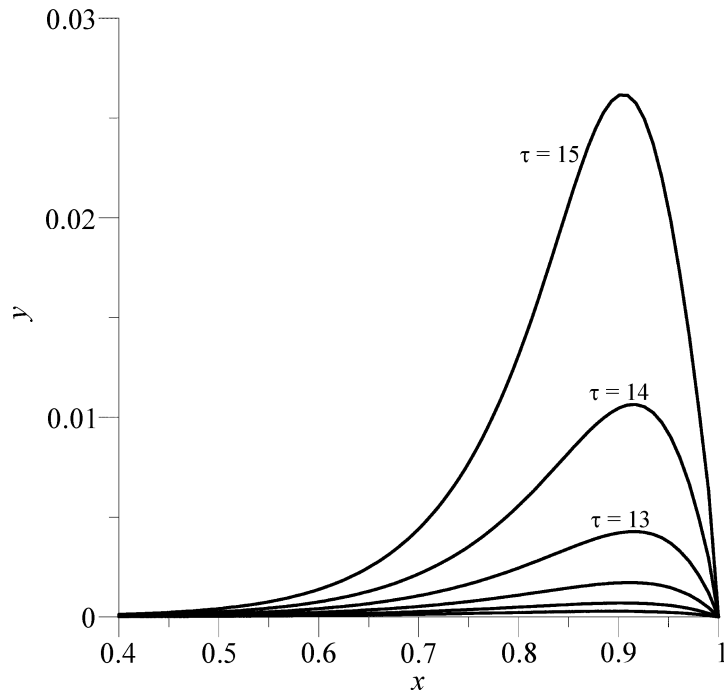


Рис. 2: Режим устремления к верхней границе. Пояснения в тексте.

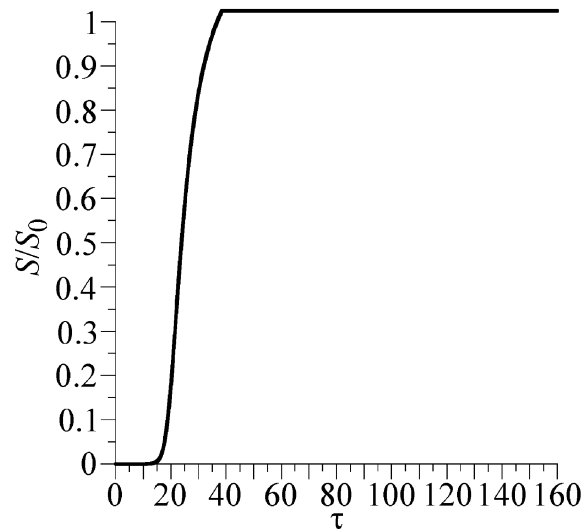


Рис. 3: Зависимость от времени “площади”, заполняемой турбулентными пульсациями, отнесенной к соответствующей максимальной площади, в момент времени $\tau = 37$.

лентными пульсациями, отнесенной к соответствующей максимальной площади S_0 на рис. 1 в момент $\tau = 37$.

Итоги: С помощью разработанного численного подхода в качестве примеров его приложения рассмотрены некоторые нестационарные режимы, допустимые нелинейным уравнением Б. Б. Кадомцева: 1) Режим устремления к верхней границе, 2) Режим растекания турбулентных пульсаций, 3) Режим укрупнения переднего фронта растекания, 4) Режим установления квазискачка фронта заполнения допустимого уравнением Кадомцева фазового пространства, 5) Режим торможения скачка и установления предсказанного ранее предшественниками стационарного состояния.

Мы отдаем себе отчет о том, что совершаем лишь первые шаги в описании нестационарной турбулентности в модели Б. Б.Кадомцева.

Работа поддержана грантом РФФИ 14-12-00824.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] Б. Б. Кадомцев, *Турбулентность плазмы*. В: Сборник под редакцией М. А. Леонтовича, вып. 4 (М., Атомиздат, 1964), стр. 188-339.
- [2] В. И. Петвиашвили, *ДАН СССР* **153**, 1295 (1963).
- [3] Б. Б. Кадомцев, *Коллективные явления в плазме* (М., Наука, 1976).
- [4] Б. Б. Кадомцев, *Коллективные явления в плазме*, Издание второе, Исправленное и дополненное (М., Наука, 1988).

Поступила в редакцию 30 июня 2016 г.