УДК 533.9.01

СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫЙ ИОННО-ЗВУКОВОЙ СОЛИТОН С РЕЛЯТИВИСТСКИМИ ЭЛЕКТРОНАМИ

Д. Н. Габышев[1], А. А. Рухадзе[1,2]

В модели плазмы с холодными ионами рассмотрен одномерный нерелятивистский ионно-звуковой солитон, способный захватывать релятивистские электроны, которые описываются распределением Максвелла–Юттнера. Показано, что полученные решения занимают промежуточное положение между солитоном Р. З. Сагдеева (1964) *и солитоном А. В. Гуревича* (1968).

Ключевые слова: : ионно-звуковой солитон, распределение Максвелла–Юттнера.

Введение. Профиль нелинейной уединённой ионно-звуковой волны в неизотермической плазме впервые был рассмотрен Р. З. Сагдеевым в 1964 г. [1], а с учётом захвата электронов – А. В. Гуревичем в 1968 г. [2]. Предположим, фактор Лоренца γ для уединенной волны близок к 1. Нерелятивистские уравнения двухжидкостной гидродинамики неизотермической плазмы с холодными ионами $T_e \gg T_i$ в одномерном случае [1, 3]:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial n_i v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 4\pi e(n_e - n_i),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{e}{M}\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\Phi}{T_e}\right), \tag{1}$$

где T_e, n_e и T_i, n_i – температура и концентрация, соответственно, электронной и ионной компонент плазмы, n_0 – равновесная концентрация, M – масса ионов, v – скорость потока массы вещества, $\vec{v}||x$. Ионы однократно ионизованы (кратная ионизация рассмотрена А. И. Ахиезером [4]). Потенциал поля Φ считаем функцией от автомодельной переменной $\xi = x - ut$, где $u = \text{const}$. В рамках приближения холодных ионов система (1) дополняется предельными условиями:

$$v = 0 \text{ и } n_i = n_0 \text{ при } \Phi = 0. \tag{2}$$

[1] ИОФ РАН, 119991 Россия, Москва, ул. Вавилова, 38; e-mail: gabyshev-dmitrij@rambler.ru.

[2] Московский физико-технический институт (Государственный университет), МФТИ, 141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9.

Система (1) с условиями (2) сводится к одному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} = 4\pi e n_0 \left[\exp\left(\frac{e\Phi}{T_e}\right) - \frac{u}{\sqrt{u^2 - 2e\Phi/M}}\right].$$

Введём безразмерные переменные $F \overset{\text{def}}{=} e\Phi/T_e$, $\eta \overset{\text{def}}{=} \xi/r_{De}$, и параметр $q \overset{\text{def}}{=} u/v_s > 1$. Учитывая, что скорость звука равна $v_s = \sqrt{T_e/M}$, а дебаевский радиус электронов $r_{De} = \sqrt{T_e/4\pi e^2 n_0}$:

$$\frac{d^2F}{d\eta^2} = \mathrm{e}^F - \frac{1}{\sqrt{1 - 2\dfrac{F}{q^2}}}. \tag{3}$$

А. В. Гуревич [2] учёл захват электронов и получил модификацию уравнения (3):

$$\frac{d^2F}{d\eta^2} = \mathrm{e}^F - \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{2F}{q^2}}} - \frac{\Delta n}{n_0}, \tag{4}$$

где поправка к концентрации электронов, распределённых по Максвеллу, равна:

$$\frac{\Delta n}{n_0} = \mathrm{e}^F \mathrm{erf}\sqrt{F} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{F} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} F^{3/2}\left(1 + \frac{2}{5}F + \frac{4}{35}F^2 + ...\right). \tag{5}$$

Техника сведения (3)–(4) к уравнению Кортевега–де Вриза (КдВ) с решением в виде уединённой волны проработана детально в слабо нелинейном пределе $1 - \frac{1}{q} \ll 1$ [3, 5]. Получить точное решение (4) в случае сильной нелинейности можно численно из уравнения:

$$\frac{dF}{d\eta} = \pm\sqrt{2\left[\mathrm{e}^F - \mathrm{e}^{F_m} + q^2\left(\sqrt{1 - \frac{2F}{q^2}} - \sqrt{1 - \frac{2F_m}{q^2}}\right) - \frac{1}{n_0}\int\limits_{F_m}^{F} \Delta n dF'\right]}, \tag{6}$$

где $F_m \overset{\text{def}}{=} F|_{\eta=\,0}$ – максимальное (амплитудное) значение поля. В (6) учтено $dF/d\eta|_{\eta=0} = 0$. Само же выражение (6) с точностью до множителя $-T_e/(e \cdot r_{De})$ определяет напряжённость электрического поля в одномерном солитоне, экстремум которой будет наблюдаться, очевидно, в тех точках, где равна нулю левая часть уравнения (4).

Захват релятивистских электронов. Чем выше электронная температура, тем больше доля достаточно энергичных электронов, для которых неприменимо распределение Максвелла. В этом случае надо использовать распределение Максвелла–Юттнера, учитывающее релятивизм [6], но только его одного недостаточно. В этом распределении требуется учесть больцмановское распределение электронов во внешнем силовом поле $e\Phi$:

$$f_{MJB}(p) = n_0 A \exp\left(F - \frac{1}{\theta} \cdot \sqrt{1+(p/mc)^2}\right), \text{где } A = \frac{1}{4\pi (mc)^3 \theta K_2(1/\theta)},$$

где K_2 – модифицированная функция Бесселя второго рода (функция Макдональда), $\theta = T_e/mc^2$ – безразмерная температура, m – масса электрона.

Кинетическая энергия электронов, захватываемых солитоном, очевидно, лежит в пределах $0 \le E_{\text{кин}} \le e\Phi$, потому импульс таких электронов лежит в диапазоне

$$0 \le \frac{p}{mc} \le \sqrt{\left(1+\frac{e\Phi}{mc^2}\right)^2 - 1}.$$

Следовательно, вместо поправки к концентрации электронов (5) следует брать

$$\Delta n = \int\limits_0^{p_{\max}} f_{MJB} d\vec{p} = \int\limits_0^{p_{\max}} f_{MJB}(p) 4\pi p^2 dp,$$

$$\frac{\Delta n}{n_0} = \frac{\theta^2 e^F}{K_2(1/\theta)} \int\limits_0^{\sqrt{F^2+2\frac{F}{\theta}} s^2 e^{-\sqrt{\frac{1}{\theta^2}+s^2}}} ds = \frac{\theta^2 e^F}{K_2(1/\theta)} \int\limits_{\frac{1}{\theta}}^{F+\frac{1}{\theta}} z\sqrt{z^2 - \frac{1}{\theta^2}} e^{-z} dz, \tag{7}$$

где $s = p/mc\theta$, а $z^2 = s^2 + 1/\theta^2$ – удобная подстановка. Интеграл (7) аналитичен, когда одновременно $\theta \gg 1$ и $F \gg 1/\theta$. Когда амплитуда солитона мала $F \ll 1/\theta$, тогда имеем примерно

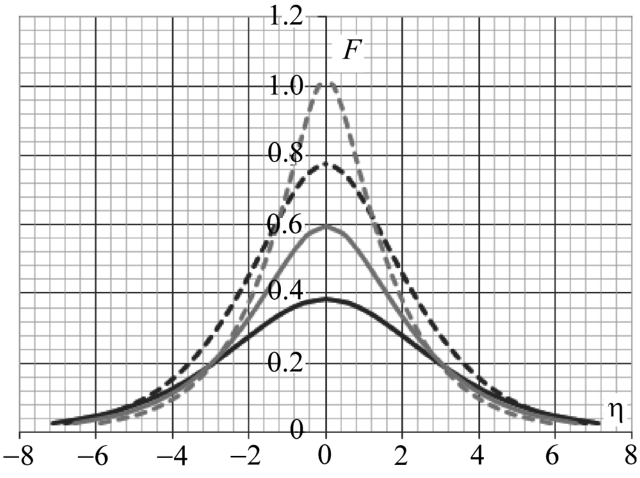
$$\frac{\Delta n}{n_0} \approx \frac{\theta^2}{K_2(1/\theta)} \left(\frac{1}{\theta} + \frac{F}{2}\right) \sqrt{\frac{F}{\theta}} e^{F/2 - 1/\theta} = \frac{\theta^{3/2} e^{-1/\theta}}{K_2(1/\theta)} \left(\frac{1}{\theta} + \frac{F}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{F}{2} + \frac{F^2}{8} + ...\right) \sqrt{F}.$$

И тогда аналитически вычислим интеграл от поправки к концентрации в (6):

$$\frac{1}{n_0} \int\limits_{F_m}^{F} \Delta n dF' \approx \frac{e^{-\frac{1}{\theta}} \sqrt{\theta}}{K_2(1/\theta)} \left\{ \sqrt{F'} e^{\frac{F'}{2}} [\theta(F'-3) + 2] + i\sqrt{2\pi} \left(1 - \frac{3}{2}\theta\right) \operatorname{erf}\left(i\sqrt{\frac{F'}{2}}\right) \right\} \Bigg|_{F_m}^{F}.$$

Далее, как и в нерелятивистском случае [2], задачу можно решить только численно из (6). Разложение (4) и (7) по степеням F в нулевом приближении даёт КдВ-подобное уравнение:

$$\frac{d^2 F}{d\eta^2} = F\left(1 - \frac{1}{q^2}\right) + B\sqrt{F}, \text{ где } B = \frac{\sqrt{\theta}}{K_2(1/\theta)} e^{-1/\theta} \approx_{\theta \to 0} \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$



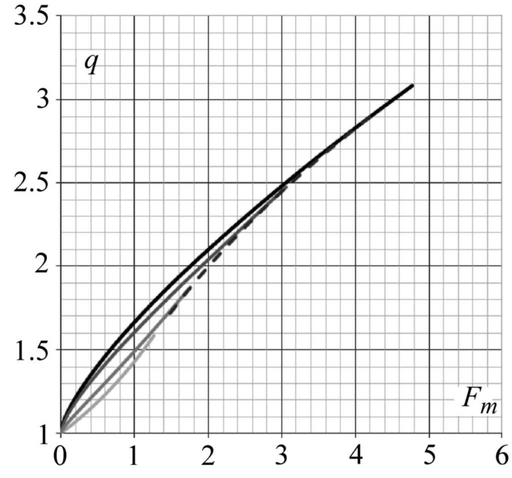


Рис. 1: *Решения уравнения* (6) *с поправкой* (7) *при* $q = 1.3$ *(сплошные) и* $q = 1.5$ *(пунктиры):* $\theta = 0.1$ *– тёмно-серые кривые,* $\theta = 0.8$ *– светло-серые кривые.*

Рис. 2: *Зависимости* q *от* F_m*, сверху вниз от черного к светло-серому: солитон Гуревича* [2]; $\theta = 0.1$; $\theta = 0.8$*; солитон Сагдеева* [1]. *Пунктир –* $q_{cr}(F_{cr})$.

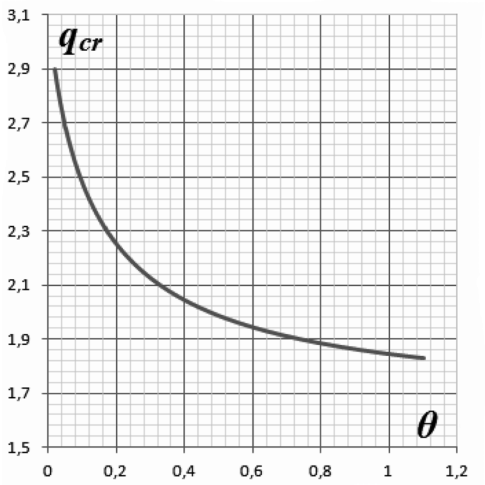
Солитон в плазме с релятивистскими электронами. Уединённые решения (6) (рис. 1) на бесконечности ограничены $dF/d\eta|_{\eta\to\pm\infty} = 0$ и, более того, выходят на нуль $F|_{\eta\to\pm\infty} = 0$. Поэтому из (6) находим связь между q и F_m (рис. 2):

$$q^2 = \frac{\left(\mathrm{e}^{F_{m(cr)}} - 1 + \frac{1}{n_0}\int\limits_{F_m}^{0} \Delta n dF'\right)^2}{2\left(\mathrm{e}^{F_{m(cr)}} - F_m - 1 + \frac{1}{n_0}\int\limits_{F_m}^{0} \Delta n dF'\right)}. \tag{8}$$

Как и в нерелятивистском случае [1, 2], здесь число Маха q принимает не любые значения. Критическая амплитуда (и соответствующее ей число Маха) с учётом (8) находится из условия

$$e\Phi_{cr} = \frac{Mu^2}{2},\ v_s = \sqrt{T_e/M} \to \mathrm{e}^{F_{m(cr)}} - 2F_{cr} - 1 + \frac{1}{n_0}\int\limits_{F_{cr}}^{0} \Delta n dF' = 0.$$

В отличие от нерелятивистского случая, теперь критическое число Маха (рис. 3) и поправка к концентрации электронов (7) параметризованы температурой θ, то есть солитоны с одинаковым q, но разной θ уже не конгруэнтны друг другу (рис. 1). Нетрудно



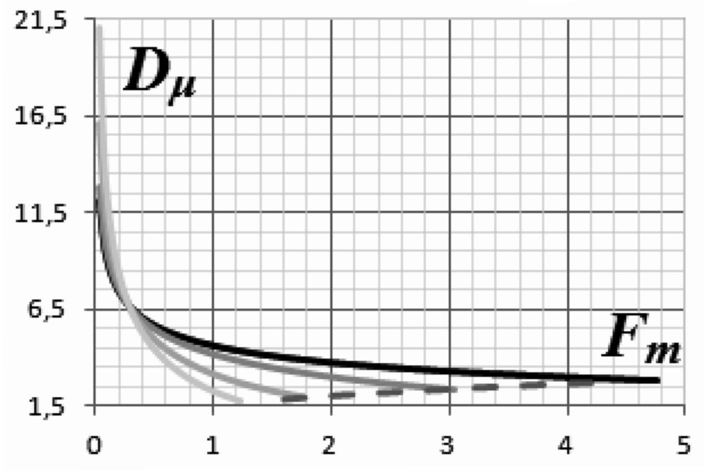


Рис. 3: *Зависимость критического числа Маха* q_{cr} *от электронной температуры* θ.

Рис. 4: *Зависимости* D_μ *от* F_m, *от черного к светло-серому: солитон Гуревича* [2]; $\theta = 0.1$; $\theta = 0.8$; *солитон Сагдеева* [1]. *Пунктир* – $D_\mu(F_{cr})$.

заметить, что фактор

$$\gamma = \left[1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2\right]^{-1/2} \equiv \left(1 - \frac{m\theta}{M} q^2\right)^{-1/2}$$

при q_{cr} в водородной плазме, даже если $\theta = 10$, отличается от 1 менее чем на 1%. Следовательно, сделанное вначале предположение о близости γ к 1 оправдывает запись (1).

Разделяя переменные и численно интегрируя (6), не составляет большого труда построить графики зависимости эффективной ширины солитона D_μ, взятой на половине амплитуды от F_m (рис. 4), и сравнить их с результатами [1, 2].

Выводы. В модели плазмы с холодными ионами свойства точно рассчитанного ионно-звукового солитона радикально различаются в присутствии классических и релятивистских электронов. В последнем случае два солитона с одним и тем же числом Маха q являются подобными, если и только если одинакова электронная температура θ в их плазмах. При этом от θ зависит критическое значение q_{cr} (рис. 3). Другим отличием от классического случая [2] является тот факт, что связь между q и F_m становится аналитической лишь при малой амплитуде солитона $F_m \ll 1/\theta$, либо когда одновременно $\theta \gg 1$ и $F \gg 1/\theta$. Пучок графиков $q(F_m)$ расположен в области между решениями А. В. Гуревича [2] и Р. З. Сагдеева [1] (рис. 2). Повышение θ при фиксированной амплитуде солитона F_m приводит к обеднению солитона электронами. В то же время, в ультрарелятивистском пределе чем выше θ, тем менее точна система (1), и графики $q(F_m)$ не могут слиться с найденным Р. З. Сагдеевым.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. З. Сагдеев, *Вопросы теории плазмы. Выпуск 4.* Под ред. М. А. Леонтовича (М., Атомиздат, 1964), с. 20.

[2] А. В. Гуревич, ЖЭТФ **53**(3), 953 (1968).

[3] А. Ф. Александров, А. А. Рухадзе, *Лекции по электродинамике плазмоподобных сред* (М., Изд. МГУ, 1999), с. 320, 325.

[4] А. И. Ахиезер (ред.), *Электродинамика плазмы* (М., Наука, 1974), с. 406.

[5] А. Ф. Александров, А. А. Рухадзе, *Лекции по электродинамике плазмоподобных сред: Неравновесные среды* (М., Изд. МГУ, 2002), с. 205.

[6] F. Jüttner, Annalen der Physik **339**(5), 856 (1911).

Поступила в редакцию 9 марта 2016 г.

После переработки – 2 декабря 2016 г.