УДК 517.956.4

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

В. И. Крылов[1], А. А. Рухадзе[2], В. И. Нефедов[3]

Рассмотрен процесс установления равновесного пространственного распределения концентрации находящихся в одномерной ограниченной области пространства частиц, на которые действует постоянная сила, нормальная к непроницаемым границам области. Такой процесс описывается решением третьей краевой задачи с однородными граничными условиями двумерного уравнения параболического типа. Показано, что найденное здесь решение, казалось бы, хрестоматийной задачи математической физики, но имеющей большое значение в приложениях, нельзя получить, используя известную в литературе функцию Грина этой задачи.

Ключевые слова: уравнение диффузии, третья краевая задача, функция Грина, параболическое уравнение, внешняя сила.

Введение. В настоящее время существует ряд научных направлений, связанных с движением наночастиц или других малых объектов в прозрачных средах под действием интенсивного электромагнитного излучения (см., напр., [1, 2]).

Уравнение

$$\frac{\partial n}{\partial \bar{t}} = D\frac{\partial^2 n}{\partial \bar{z}^2} - v\frac{\partial n}{\partial \bar{z}} + F(\bar{z}, \bar{t}), \tag{1}$$

с граничными условиями

$$vn - D\partial n/\partial \bar{z} = 0, \tag{2}$$

в точках $\bar{z} = 0$, $\bar{z} = l$; играет важную роль в теории таких процессов. Здесь n – концентрация частиц; постоянные параметры D и v – коэффициент диффузии и скорость

[1] Дальневосточный государственный университет путей сообщения, 680021 Россия, Хабаровск, ул. Сарышева, 47.

[2] ИОФ РАН, 119991 Россия, Москва, ул. Вавилова, 38; e-mail: rukh@fpl.gpi.ru.

[3] Московский институт радиофизики, электроники и автоматики (государственный университет МТРЭА), 119454 Россия, Москва, пр-т Вернадского, 6.

частиц, определяемая их систематическим смещением под действием постоянной силы, направленной вдоль координаты $\bar{z}$. Однако в известной нам литературе мы не нашли решения такой задачи даже с $F(\bar{z}, \bar{t}) = 0$, которое описывало бы установление больцмановского распределения концентрации (как функции координаты). Только в широко используемом в приложениях справочнике [3, с. 66] указана, по-видимому, найденная его автором функция Грина $G(\bar{z}, \bar{x}, \bar{t})$ третьей краевой задачи для уравнения (1) с постоянными коэффициентами D, v, и граничными условиями самого общего вида, частным случаем которых является (2). Однако эта функция Грина не дает правильного решения, по крайней мере, при $F(\bar{z}, \bar{t}) = 0$ и (2).

Для доказательства, достаточно положить $t = \infty$ в решении рассматриваемой задачи, записанном в виде интеграла:

$$n(z, t) = l \int_0^1 G(z, x, t) n_0(x) dx, \tag{3}$$

где $z = \bar{z}/l$; $x = \bar{x}/l$; $t = D\bar{t}/l^2$; $n_0(x) = n(x, 0)$; $G(z, x, t)$ из [3] в выбранных нами обозначениях и для граничных условий (2), имеет следующий вид:

$$G(z, x, t) = \exp(u(z - x)/2) \sum_{m=1}^{\infty} B_m^{-1} y_m(z) y_m(x) \exp[-(m^2\pi^2 + u^2/4)t]; \tag{4}$$

$B_m = 0.5l(u^2/(4m^2\pi^2) + 1)$; $u = vl/D$; $y_m(z) = u/(2m\pi) \sin m\pi z + \cos m\pi z$. Нетрудно понять и без взятия интеграла в (3), что он обращается в нуль из-за экспоненциального множителя в $G(z, x, t)$, содержащего t. Такой результат является физически бессмысленным.

Действительно, левая часть (2) является плотностью потока частиц, и при выполнении равенства (2) в отсутствие источника $F(z, t) = 0$, число частиц на интервале $[0, l]$ должно оставаться постоянным и, при нетривиальном решении (1), не равным нулю.

При $t = \infty$ правильное распределение концентрации должно быть близко к хорошо известной в статистической физике и гидростатике формуле Больцмана.

Оказывается, что, несмотря на хрестоматийность рассматриваемой здесь задачи, появление физически бессмысленного результата при применении (4) вызвало определенные трудности у некоторых исследователей, что и привело к появлению настоящей статьи с найденным правильным решением.

Решение задачи и анализ результатов. Для нахождения правильного решения заметим, что правая часть (1) (при $F(\bar{z}, \bar{t}) = 0$) является дивергенцией от потока частиц, определяемого левой частью уравнения (2), при всех $\bar{z}$ (дифференцирование левой части (2) по $\bar{z}$ приводит к правой части (1)). Поэтому стационарное решение уравнения (1) $n_c = n_{c0}\exp(uz)$ одновременно удовлетворяет и граничным условиям (2). Следовательно, n_c должно содержаться в виде слагаемого в общем решении уравнения (1), удовлетворяющего (2), которое несложно найти методом разделения переменных. Отметим, что подстановкой $n = n_1\exp\alpha z$, с $\alpha = u/2$, уравнение (1) преобразовывается в $\partial n_1/\partial t = \partial^2 n_1/\partial z^2 - \alpha^2 n_1$. Решение этих уравнений имеет вид:

$$n = n_{c0}\exp(uz) + \exp(uz/2)\sum_{m=1}^{\infty} C_{cm} y_m(z)\exp[-(m^2\pi^2 + u^2/4)t]. \tag{5}$$

Константа n_{c0} определяется при $t = \infty$ из условия сохранения числа частиц N в цилиндре высотой l вдоль оси $\bar{z}$ и с единичной площадью торцов:

$$N = l\int_0^1 n_{c0}\exp(uz)dz = (n_{c0}l/u)[e^u - 1]. \tag{6}$$

Коэффициенты C_{cm}, как обычно, определяем при $t = 0$ с использованием ортогональности (для различных m) функций $y_m(z)$, квадрат нормы которых совпадает с B_m/l. Для произвольной начальной концентрации $n_0(z)$ получим:

$$\int_0^1 (n_0(z)e^{-uz/2} - n_{c0}e^{uz/2})y_m(z)dz = C_{cm}B_m/l. \tag{7}$$

В случае $n_0(z) = n_0 = \text{const}$, когда $N = n_0 l$, используя (5)–(7), найдем:

$$\frac{n(z,t)}{n_0} = u\left\{\frac{\exp(uz)}{(e^u - 1)} + e^{0.5uz}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(m\pi)^2[1-(-1)^m e^{-0.5u}]}{(m^2\pi^2 + u^2/4)^2} y_m(z)e^{-(m^2\pi^2+u^2/4)t}\right\}. \tag{8}$$

Анализ выражения (8) проведем, используя пакет программ Maple 14, предварительно отметив, что при $t = 0$ выражение (8) равно единице при всех u.

Рисунок 1, на котором показана функция $n(z,t)/n_0$ при $u = 3$, иллюстрирует промежуточное распределение плотности, когда безразмерное $t \in [0, 0.1]$.

Переход к распределению плотности, соответствующему формуле Больцмана (для конечной области пространства в направлении действия силы), показан на рис. 2. Как видно из этого рисунка установление равновесия фактически происходит уже при $t = 1$ (для выбранного $u = 3$), т.е. $n(z,1)/n_0$ практически совпадает с выражением

$$\frac{n(z,\infty)}{n_0} = u\frac{\exp(uz)}{(e^u - 1)}.$$

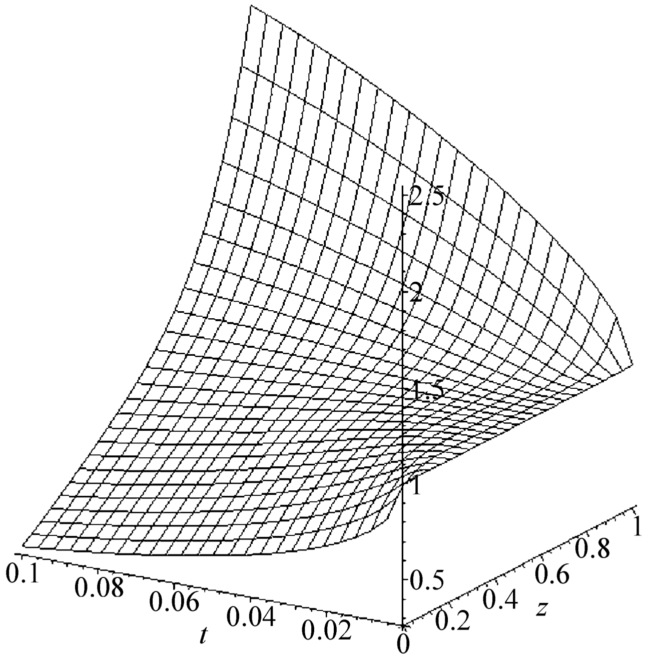

Рис. 1: *Функция* $n(z,t)/n_0$ *при* $u = 3$ *и* $t \in [0, 0.1]$.

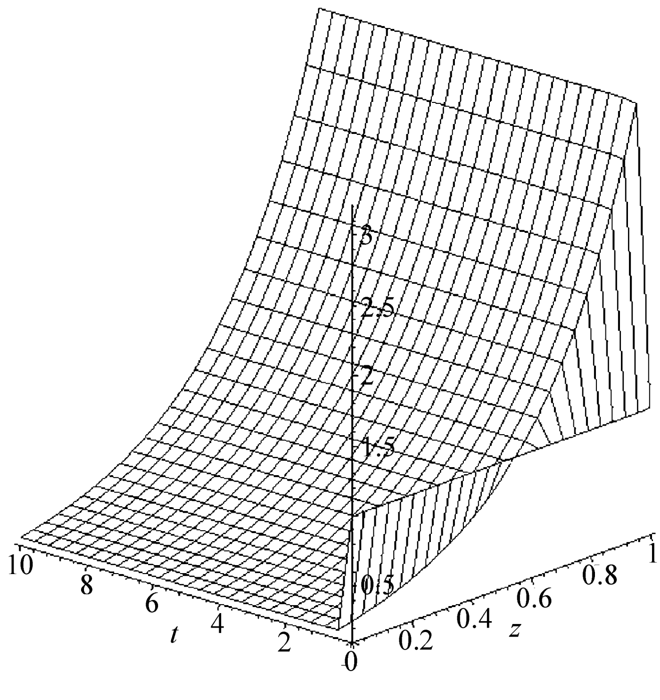

Рис. 2: *Функция* $n(z,t)/n_0$ *при* $u = 3$ *и* $t \in [0, 10]$.

Таким образом, полученное решение правильно описывает изменение со временем функции $n(z, t)$ и установление равновесного распределения в соответствии с принципами равновесной статистической физики.

Найденное решение соответствует достаточно специфичному (чрезвычайно частному) граничному условию. Однако из теории дифференциальных уравнений известно, что для некоторых частных случаев нельзя получить решение из решения, найденного для более общего случая. Это имеет, например, место для обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами с кратными корнями характеристического уравнения. Не является ли ситуация, рассмотренная здесь, в некотором смысле, подобна этому случаю? А именно, соответствующая функция Грина из [3] будет определять правильные решения третьей краевой задачи с граничными условиями более общего вида чем (2). Ниже приведенные рассуждения показывают, что это, по-видимому, не совсем так.

Покажем, как можно использовать найденную в [3] функцию Грина для уравнения

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} - u\frac{\partial n}{\partial z} + \frac{l^2}{D}F(z, t) \tag{9}$$

(наши обозначения отличны от используемых в [3]) с граничными условиями самого общего вида: $\partial n/\partial z - k_1 n = g_1(t)$ при $z = 0$, $\partial n/\partial z + k_2 n = g_2(t)$ при $z = 1$ и с начальным условием $n_0(z) = n(z, 0)$, так, чтобы было учтено решение $n_c = n_{c0}\exp(uz)$.

Пусть $n(z, t)$ определяется функцией Грина $G(z, x, t)$ [3, с. 66] (которую мы здесь не выписываем) третьей краевой задачи и удовлетворяет (9). В соответствии с вышеизложенным, это решение не содержит в качестве слагаемого функцию n_c. Будем искать решение уравнения (9) в виде суммы $n(z, t) + n_c$, которая после подстановки ее в (9) оставит уравнение верным. Граничные же и начальные условия для $n(z, t)$ изменятся и будут иметь следующий вид: $\partial n/\partial z - k_1 n = g_1(t) + (k_1 - u)n_c$ при $z = 0$, $\partial n/\partial z + k_2 n = g_2(t) - (k_2 + u)n_c$ при $z = 1$ и $n_0(z) = n(z, 0) - n_c$.

Следовательно, при использовании $G(z, x, t)$ из [3], решение рассматриваемой задачи необходимо выбирать в виде $n(z, t) + n_c$, и при определении $n(z, t)$ (через $G(z, x, t)$) заменять $g_1(t)$ на $g_1(t) + (k_1 - u)n_c$, $g_2(t)$ на $g_2(t) - (k_2 + u)n_c$ и $n_0(z)$ на $n(z, 0) - n_c$.

Заключение. Таким образом, найденное здесь решение уравнения (1) с граничными условиями (2) при $F(z, t) = 0$, определяет установление стационарного распределения концентрации частиц, определяемого формулой Больцмана. Этот результат отличается от решения, которое можно получить с использованием функции Грина из [3], из-за того, что оно не содержит функции n_c. Тем не менее, с помощью такой функции Грина, по-видимому, можно получать правильные решения третьей краевой задачи уравнения (9), проведя модификацию граничных и начальных условий.

Авторы выражают глубокую благодарность В. И. Иванову за стимулирующую дискуссию.

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] В. И. Иванов, А. И. Ливашвили, Электрострикционный механизм самовоздействия излучения в жидкости с наночастицами. Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Физика **4**(2), 58 (2009).

[2] В. И. Иванов, А. А. Кузин, А. И. Ливашвили, Термоиндуцированное самовоздействие гауссова пучка излучения в жидкой дисперсной среде. Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Физика **5**(1), 5 (2010).

[3] А. Д. Полянин, *Справочник по линейным уравнениям математической физики* (М., Физико-математическая литература, 2001).

Поступила в редакцию 8 сентября 2015 г.