

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ

ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ имени П. Н. ЛЕБЕДЕВА

РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

**КРАТКИЕ
СООБЩЕНИЯ
ПО ФИЗИКЕ**

3

Москва — 2017

Информация

Страница журнала “Краткие сообщения по физике ФИАН” в интернете:

<http://ksf.lebedev.ru>

Издательство ALLERTON PRESS, INC., 18 WEST 27-th STR. NEW YORK,
N.Y. 10011 USA издает на английском языке полный перевод журнала “КРАТКИЕ
СООБЩЕНИЯ ПО ФИЗИКЕ” под названием Bulletin of the Lebedev Physics Institute
(Russian Academy of Sciences), volume 44 (2017).

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Н. Н. Колачевский – главный редактор
О. Н. Крохин – зам. главного редактора
В. П. Силин – зам. главного редактора
Л. Л. Чайков – ответственный секретарь
П. И. Арсеев – член редколлегии
И. Г. Зубарев – член редколлегии
В. К. Конюхов – член редколлегии
Ю. А. Михайлов – член редколлегии
А. И. Никишов – член редколлегии
Н. Г. Полухина – член редколлегии
А. А. Рухадзе – член редколлегии
В. Н. Сорокин – член редколлегии

О СКОРОСТИ ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ ПОЛЯ В ДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЕ

М. А. Микаэлян

Для волнового процесса с произвольным законом дисперсии $\omega = \omega'(k) + i\omega''(k)$ предложено строгое определение групповой скорости v_g . Для монохроматического приближения получено предельное выражение $v_g(k)$. Найдено условие, при котором $v_g(k)$ принимает вид выражения Кузелева–Рухадзе [1] $\frac{d\omega'(k)}{dk}$. В общем же случае оказывается, что $v_g(k)$ определяется не только законом дисперсии $\omega(k)$, но и другими элементами начальной задачи. Применительно к диссипативной среде показано, что $v_g(k)$ определяет скорость переноса энергии поля, и эта скорость не превышает скорость света в пустоте. Также получено выражение для скорости переноса энергии в случае, когда закон дисперсии задан в виде $k = k'(\omega) + ik''(\omega)$, что соответствует граничной задаче.

Ключевые слова: энергия поля, групповая скорость, диссипативная среда.

Для любой физической системы существует так называемый *полный набор величин*. Это набор таких величин, задание которых в начальный момент времени однозначно определяет эволюцию каждой из величин. Опираясь с полным набором величин, мы можем сформулировать *начальную задачу*. Если же мы оперируем с меньшим числом величин, не образующих полный набор, то “платой” за неполноту описания оказывается необходимость обращения к предыстории. Именно так обстоит дело в рамках стандартного описания диэлектрика с временной (частотной) дисперсией, материальное уравнение которого содержит интеграл по предыстории:

$$\mathbf{P}(t) = \int_{-\infty}^t f(t-t')\mathbf{E}(t')dt'. \quad (1)$$

ИОФ РАН, 119991 Россия, Москва, ул. Вавилова, 38; e-mail: mikhail@bk.ru.

Здесь и ниже диэлектрическая среда считается однородной, изотропной, немагнитной ($\mathbf{B} = \mathbf{H}$) и не обладающей пространственной дисперсией. Стандартное описание (немагнитной) среды оперирует с величинами $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D}\}$ или, с учетом $\mathbf{D} \equiv \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$, – с величинами $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{P}\}$. Последние полный набор не образуют – знание указанных величин в начальный момент времени не позволяет определить их эволюцию (необходимо знание предыстории). Использование нелокального по времени материального уравнения не позволяет сформулировать начальную задачу.

Другим следствием неполноты стандартного описания является невозможность получения выражения для плотности энергии поля в диссипативной среде. Как было отмечено в работе [2], информации, содержащейся в диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi\alpha(\omega)$ (где диэлектрическая восприимчивость $\alpha(\omega)$ – фурье-образ функции $f(t)$, фигурирующей в (1)), не достаточно для того, чтобы из работы, производимой над средой, выделить часть, соответствующую тепловыделению (с тем, чтобы другую часть работы назвать, по определению, энергией поля).

Материальное уравнение в форме (1) можно рассматривать как эмпирическое: $f(t)$ – это отклик на δ -функциональное поле \mathbf{E} . Будучи эмпирическим, оно обладает максимальной общностью, но при этом недостаточно подробно.

При теоретическом же рассмотрении материальное уравнение возникает как *уравнение движения* зарядов среды (сформулированное на языке электродинамических величин). Будучи уравнением движения, оно неизбежно оказывается локальным по времени (не содержит интегралов по предыстории), что необходимо для формулировки начальной задачи (а также для получения выражения для плотности энергии поля, см. ниже).

Для случая статики ранее было показано [3], что материальное уравнение имеет смысл условия равновесия среды (относительно флуктуаций \mathbf{P}) и для произвольного диэлектрика (в отсутствие пространственной дисперсии) имеет вид $\mathbf{E} = \frac{dV_0(\mathbf{P})}{d\mathbf{P}}$, где $V_0(\mathbf{P})$ – объемная плотность свободной энергии бесконечной однородно-поляризованной среды. Эта величина принимается (вместо материального уравнения) в качестве первичного элемента феноменологического описания среды и может задаваться степенным разложением в духе теории Ландау.

В случае же динамики рассмотрение в общем виде невозможно и приходится привлекать модельные представления о среде. В работе [4] была рассмотрена модель неполярного диэлектрика, поляризация которого обусловлена смещением частиц лишь одного

сорта. Его материальное уравнение выглядит так¹: $\mathbf{E} = \frac{dV_0(\mathbf{P})}{d\mathbf{P}} + \mu\ddot{\mathbf{P}} + \lambda\dot{\mathbf{P}}$; для линейной среды, $V_0 = aP^2/2$, оно принимает вид

$$\mu\ddot{\mathbf{P}} + \lambda\dot{\mathbf{P}} + a\mathbf{P} = \mathbf{E} \quad (2)$$

и с точностью до численных значений коэффициентов соответствует модели осцилляторов одного сорта.

Знание “истинного” материального уравнения (2) позволяет сформулировать начальную задачу. Полный набор образуют величины $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{P}, \dot{\mathbf{P}}\}$. Уравнения Максвелла в отсутствие внешних зарядов и токов имеют вид

$$\dot{\mathbf{E}} = \text{rot}\mathbf{H} - 4\pi\dot{\mathbf{P}}, \quad \dot{\mathbf{H}} = -\text{rot}\mathbf{E} \quad (3)$$

(используется система единиц, в которой $c = 1$) и совместно с материальным уравнением (2) определяют эволюцию каждой из указанных величин.

Знание локального по времени материального уравнения также позволяет получить явное выражение для плотности энергии поля [4]: уравнения поля (3) совместно с (2) приводят к уравнению непрерывности с ненулевой правой частью:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{div}\mathbf{S} = -Q, \quad (4)$$

$$U = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{H^2}{8\pi} + a\frac{P^2}{2} + \mu\frac{\dot{P}^2}{2}, \quad \mathbf{S} = \frac{1}{4\pi}[\mathbf{E}\mathbf{H}], \quad Q = \lambda\dot{P}^2. \quad (5)$$

Величина Q (работа “сил трения” осцилляторов) определяет тепловыделение; соответственно, U имеет смысл плотности энергии поля².

К электродинамике мы еще вернемся, а сейчас проведем чисто математическое рассмотрение начальной задачи. Пусть полный набор величин образуют n (вообще говоря, комплексных) функций:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_n \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Чтобы не перегружать изложение, будем считать, что все они зависят лишь от координаты x ; получаемые результаты остаются в силе и при трехмерном рассмотрении.

¹В такой форме материальное уравнение впервые было написано Гинзбургом [5, 6] применительно к сегнетоэлектрику, для которого $V_0 = -aP^2/2 + bP^2/4$.

²В то время как перенос энергии поля определяют уравнения электродинамики, перенос другой (“тепловой”) части энергии определяет уравнение теплопроводности (с источником) $\frac{\partial U_T}{\partial t} + \text{div}\mathbf{S}_T = Q$.

Полнота набора означает, что $\partial\Psi/\partial t = \hat{L}\Psi$, где \hat{L} – оператор, не зависящий от времени. Для линейной задачи $\hat{L}\Psi = \int L(x, x')\Psi(x')dx'$. Считая задачу однородной по x и добавив (для удобства) множитель $-i$, получим:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -i \int L(x - x')\Psi(x')dx'. \quad (7)$$

В большинстве случаев, представляющих интерес, элементы матрицы $L(x)$ пропорциональны δ -функции или ее производным; при этом (7) принимает вид системы дифференциальных уравнений в частных производных.

Проведя в (7) преобразование Фурье по x , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (k фигурирует как параметр):

$$\frac{d\Psi_k}{dt} = -iL_k\Psi_k. \quad (8)$$

После подстановки $\Psi_k(t) = ue^{-i\omega t}$ получаем систему алгебраических уравнений

$$(L_k - \omega\mathbf{1})u = 0, \quad (9)$$

где $\mathbf{1}$ – единичная матрица. Корни характеристического уравнения

$$\det(L_k - \omega\mathbf{1}) = 0 \quad (10)$$

определяют ветви спектра: $\omega = \omega_l(k)$, $l = 1, \dots, n$. После подстановки в (9) находятся собственные векторы $u_l(k)$, которые будем считать нормированными условием $u_l^+ u_l = 1$ (по l нет суммирования), где индекс “+” означает эрмитово сопряжение. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда имеется ровно n линейно независимых собственных векторов u_l . Тогда матрицы-столбцы $u_l(k)e^{-i\omega_l(k)t}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (8); его общее решение имеет вид $\Psi_k(t) = \sum_{l=1}^n a_l(k)u_l(k)e^{-i\omega_l(k)t}$, где функции $a_l(k)$ определяются начальными условиями: $\Psi_k(0) = \sum_{l=1}^n a_l(k)u_l(k)$. После обратного преобразования Фурье получается общее решение начальной задачи (7).

При анализе понятия групповой скорости всегда подразумевается, что пакет образует группа волн, отвечающих лишь одной ветви спектра $\omega_l(k)$; в противном случае появляются “дрожания” (известные применительно к уравнению Дирака как Zitterbewegung [7]). Опуская знак суммирования и индекс l , будем иметь:

$$\Psi_k(t) = a(k)u(k)e^{-i\omega(k)t}, \quad u^+ u = 1; \quad (11)$$

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int a(k)u(k)e^{i[kx - \omega(k)t]} dk. \quad (12)$$

Предварительно отметим известный случай, когда ω – вещественная функция k . Будем считать пакет узким в k -пространстве, то есть $a(k)$ заметно отлично от нуля в малой окрестности k_0 . Под этим понимается возможность ограничиться линейным приближением:

$$\omega \approx \omega_0 + vk, \quad v \equiv \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0}. \quad (13)$$

После подстановки в (12) получаем:

$$\Psi(x, t) = \frac{e^{-i\omega_0 t}}{2\pi} \int a(k)u(k)e^{ik(x-vt)} dk = e^{-i\omega_0 t} F(x - vt).$$

Отсюда видно, что волновой пакет с периодом $T = 2\pi/\omega_0$ восстанавливает свою форму, оказываясь при этом поступательно сдвинутым на расстояние vT . Следовательно, скорость пакета (называемая групповой) дается выражением (13).

Исторически существует два подхода к определению групповой скорости. Один из них, *кинематический*, основан на анализе кинематики волнового движения, то есть на анализе интеграла в (12). Другой же подход, “физический”, соответствует тому, что мы интересуемся скоростью переноса какой-либо физической величины; принято говорить об энергии. Для вещественного закона дисперсии оба подхода эквивалентны – ввиду предполагаемой полноты набора Ψ (6) любая физическая величина есть функционал Ψ , а значит, она переносится с той же скоростью, что и Ψ , то есть со скоростью v (13). В случае же комплексного закона дисперсии строгого восстановления формы пакета (периодически) не происходит, так что кинематический подход становится “размытым” и теряет общность.

Предпочитая “физический” подход, будем интересоваться переносом физической величины, плотность которой дается выражением

$$\rho = \Psi^+ \Psi. \quad (14)$$

Применительно к квантовой механике ρ пропорционально плотности вероятности, а в случае электродинамики ρ будет иметь смысл плотности энергии поля.

Представим матрицу $L(x)$ в виде

$$L(x) = M(x) + iN(x), \quad (15)$$

$$M(x) \equiv \frac{L(x) + L^+(-x)}{2}, \quad N(x) \equiv \frac{L(x) - L^+(-x)}{2i}; \quad (16)$$

$$M^+(-x) = M(x), \quad N^+(-x) = N(x). \quad (17)$$

Нам также понадобятся фурье-образы написанных формул:

$$L_k = M_k + iN_k, \quad (18)$$

$$M_k \equiv \frac{L_k + L_k^+}{2}, \quad N_k \equiv \frac{L_k - L_k^+}{2i}; \quad (19)$$

$$M_k^+ = M_k, \quad N_k^+ = N_k. \quad (20)$$

Формула (18) – это стандартное разложение матрицы в сумму эрмитова и антиэрмитова слагаемых. Согласно (20) M_k и N_k – эрмитовы матрицы. Через них выражаются вещественная и мнимая части ω . Помножив слева (9) на матрицу-строку u^+ , с учетом условия нормировки (11) будем иметь $\omega = u^+ L_k u$. Подставим сюда (18) и $\omega = \omega' + i\omega''$; отделив вещественную и мнимую части, получим:

$$\omega' = u^+ M_k u, \quad \omega'' = u^+ N_k u. \quad (21)$$

Помножим слева обе части (7) на матрицу-строку Ψ^+ . Прибавим к полученному соотношению эрмитово сопряженное соотношение. С учетом (14) будем иметь:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -i \int [\Psi^+(x) L(x-x') \Psi(x') - \Psi^+(x') L^+(x-x') \Psi(x)] dx'.$$

Подставив сюда (15) и воспользовавшись (17), получим:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = -Q, \quad (22)$$

где введены обозначения

$$\frac{\partial J}{\partial x} \equiv i \int [\Psi^+(x) M(x-x') \Psi(x') - \Psi^+(x') M(x'-x) \Psi(x)] dx', \quad (23)$$

$$Q \equiv - \int [\Psi^+(x) N(x-x') \Psi(x') + \Psi^+(x') N(x'-x) \Psi(x)] dx'. \quad (24)$$

J имеет смысл плотности потока физической величины. Скорость ее переноса дается выражением

$$v = \frac{J}{\rho}, \quad (25)$$

а изменение ее полного значения определяет Q : интегрируя (22) с учетом (23), получаем: $\frac{d}{dt} \int \rho dx = - \int Q dx$. Для диссипативной среды Q соответствует тепловыделению (см. (4)).

Определение скорости пакета как целого в отсутствие строгого (периодического) восстановления его формы – действие неоднозначное. Так, можно было бы групповую скорость определить как скорость “центра пакета”, координата которого определяется как среднее значение координаты: $X \equiv \int \zeta(x)x dx$, где $\zeta(x)$ – функция, задаваемая (по аналогии с квантовой механикой) выражением

$$\zeta(x) = \frac{\rho}{\int \rho dx}; \quad (26)$$

$$\zeta(x) \geq 0, \quad \int \zeta(x) dx = 1. \quad (27)$$

Тогда для X получается выражение $X = \frac{\int \rho x dx}{\int \rho dx}$, по форме идентичное определению центра масс. Однако точка с координатой X не обладает реальным смыслом. Поэтому мы определим групповую скорость по-другому – как среднее значение *реальной* скорости $v(x)$, даваемой (25): $v_g \equiv \int \zeta(x)v(x) dx$. Такое определение особенно тем, что если $|v(x)| \leq 1$, то автоматически и $|v_g| \leq 1$: с учетом (27) $|v_g| = |\int \zeta(x)v(x) dx| \leq \int \zeta(x)|v(x)| dx \leq \int \zeta(x) dx = 1$. Подставив (25) и (26) в определение v_g , получим:

$$v_g = \frac{\int J dx}{\int \rho dx}.$$

Преобразуем это выражение. Воспользовавшись тождеством $\int J dx = - \int x \frac{\partial J}{\partial x} dx$ и проведя подстановки (14) и (23), будем иметь:

$$v_g = -i \frac{\int \Psi^+(x)[(x-x')M(x-x')]\Psi(x') dx dx'}{\int \Psi^+(x)\Psi(x) dx}.$$

С учетом формул $\int \Psi^+(x)\Phi(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int \Psi_k^+ \Phi_k dk$ и $[xM(x)]_k = i \frac{dM_k}{dk}$ имеем:

$$v_g = \frac{\int \Psi_k^+ \frac{dM_k}{dk} \Psi_k dk}{\int \Psi_k^+ \Psi_k dk}.$$

Подставив сюда Ψ_k (11), получим:

$$v_g = \frac{\int a^*(k)a(k)e^{2\omega''(k)t} u^+(k) \frac{dM_k}{dk} u(k) dk}{\int a^*(k)a(k)e^{2\omega''(k)t} dk}.$$

Монохроматическому пределу соответствует бесконечно узкий в k -пространстве пакет; подставляя $a^*(k)a(k) \propto \delta(k - k_0)$ и убирая в конечном выражении индекс “ноль”, окончательно получаем:

$$v_g(k) = u^+(k) \frac{dM_k}{dk} u(k). \quad (28)$$

С учетом первого из соотношений (21) эту формулу можно переписать в виде

$$v_g(k) = \frac{d\omega'}{dk} - \left[\frac{du^+}{dk} M_k u + u^+ M_k \frac{du}{dk} \right]. \quad (29)$$

Отсюда видно, что групповая скорость определяется не только законом дисперсии $\omega(k)$, но и другими элементами начальной задачи – в частности зависимостью $u(k)$.

Отметим частный случай, когда матрица L_k (18) нормальная:

$$L_k L_k^+ = L_k^+ L_k. \quad (30)$$

Это соотношение эквивалентно коммутативности эрмитовых матриц M_k и N_k , что, в свою очередь, означает наличие у них общего ортонормированного базиса (являющегося базисом и для L_k). Тогда из (9) вытекает $M_k u = \omega' u$; после эрмитова сопряжения с учетом (20) имеем $u^+ M_k = \omega' u^+$. Благодаря этим двум соотношениям второе слагаемое в (29) принимает вид $-\omega' \frac{d(u^+ u)}{dk}$ и с учетом условия нормировки (11) обращается в нуль. В итоге получаем:

$$v_g(k) = \frac{d\omega'}{dk}. \quad (31)$$

Такое выражение впервые было получено в работе Кузелева и Рухадзе [1] для случая, когда полный набор Ψ (6) образует одна комплексная функция ($n = 1$). Этому отвечает отсутствие матриц и, следовательно, выполнимость коммутационного соотношения (30), приводящего к выражению (31).

Как отмечалось, определение групповой скорости пакета – “дело субъективное”. Объективным же является утверждение, относящееся к монохроматическому пределу: для монохроматической волны

$$\Psi = au(k) e^{\omega''(k)t} e^{i[kx - \omega'(k)t]} \quad (32)$$

($a = \text{const}$, $u^+ u = 1$) скорость v (25) дается выражением (28):

$$\frac{J}{\rho} = u^+(k) \frac{dM_k}{dk} u(k). \quad (33)$$

Для вещественной задачи (в (7) $L(x)$ чисто мнимое) вместо (32) и (33) будем иметь:

$$\Psi = au(k) e^{\omega''(k)t} e^{i[kx - \omega'(k)t]} + a^* u^*(k) e^{\omega''(k)t} e^{-i[kx - \omega'(k)t]}, \quad (34)$$

$$\frac{\langle J \rangle}{\langle \rho \rangle} = u^+(k) \frac{dM_k}{dk} u(k), \quad (35)$$

где угловые скобки означают усреднение по *пространственному* периоду.

Следует отметить, что при исследовании вопроса о скорости переноса энергии поля обычно рассматривается не начальная, а стационарная задача. При этом (по смыслу) частота ω – величина вещественная, а волновое число k , определяемое характеристическим уравнением (10), оказывается, вообще говоря, комплексным: $k = k'(\omega) + ik''(\omega)$; такая ситуация свойственна *граничной задаче*.

Для монохроматической волны

$$\Psi = au(\omega)e^{-k''(\omega)x}e^{i[k'(\omega)x - \omega t]} \quad (36)$$

($a = \text{const}$, $u^+u = 1$) (14) принимает вид $\rho = a^*ae^{-2k''x}$. Считая (для определенности) $k'' > 0$, при $x \rightarrow +\infty$ имеем $\Psi \rightarrow 0$, а значит и $J \rightarrow 0$. Следовательно,

$$J(x) = \int_{+\infty}^x \frac{\partial J(\xi)}{\partial \xi} d\xi = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial J(\xi)}{\partial \xi} \theta(\xi - x) d\xi,$$

где $\theta(x)$ – ступенчатая функция Хевисайда, а $\frac{\partial J(x)}{\partial x}$ дается (23). Этот интеграл легко вычисляется, и после деления на ρ получаем:

$$\frac{J}{\rho} = -iu^+(\omega) \left[\int x M(x) e^{-ik'x} \frac{\text{sh}(k''x)}{k''x} dx \right] u(\omega). \quad (37)$$

Если элементы матрицы $M(x)$ – сосредоточенные функции (пропорциональные δ -функции и ее производным; в электродинамике – это случай отсутствия пространственной дисперсии), то величину $\frac{\text{sh}(k''x)}{k''x}$ можно заменить ее значением при $x = 0$, то есть единицей, после чего (37) принимает вид

$$\frac{J}{\rho} = u^+(\omega) \left(\frac{dM_k}{dk} \right)_{k=k'(\omega)} u(\omega). \quad (38)$$

Для вещественной задачи вместо (36) и (38) будем иметь:

$$\Psi = au(\omega)e^{-k''(\omega)x}e^{i[k'(\omega)x - \omega t]} + a^*u^*(\omega)e^{-k''(\omega)x}e^{-i[k'(\omega)x - \omega t]}, \quad (39)$$

$$\frac{\langle J \rangle}{\langle \rho \rangle} = u^+(\omega) \left(\frac{dM_k}{dk} \right)_{k=k'(\omega)} u(\omega), \quad (40)$$

где угловые скобки означают усреднение по *временному* периоду.

Проиллюстрируем сделанное выше примером плоской волны, распространяющейся в неполярном диэлектрике в направлении оси x ; \mathbf{E} и \mathbf{P} считаются параллельными

оси y , а \mathbf{H} – оси z . Обозначив $E_y \equiv E$, $P_y \equiv P$, $H_z \equiv H$ и $\dot{P} \equiv G$, перепишем уравнения поля (3) и материальное уравнение (2):

$$\dot{E} = -\frac{\partial H}{\partial x} - 4\pi G, \quad \dot{H} = -\frac{\partial E}{\partial x}, \quad \mu \dot{G} = E - aP - \lambda G.$$

После введения обозначений

$$\frac{\{E, H\}}{\sqrt{8\pi}} \equiv \{e, h\}, \quad \sqrt{\frac{a}{2}}P \equiv p, \quad \sqrt{\frac{\mu}{2}}G \equiv g, \quad \sqrt{\frac{4\pi}{\mu}} \equiv \Omega, \quad \sqrt{\frac{a}{\mu}} \equiv \omega_0, \quad \frac{\lambda}{\mu} \equiv \gamma$$

будем иметь систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{e} = -\frac{\partial h}{\partial x} - \Omega g \\ \dot{h} = -\frac{\partial e}{\partial x} \\ \dot{p} = \omega_0 g \\ \dot{g} = \Omega e - \omega_0 p - \gamma g \end{cases}, \quad (41)$$

которая имеет вид (7) для полного набора величин $\{e, h, p, g\}$.

Роль величин ρ и J играют плотность энергии U и плотность потока энергии S , даваемые (5):

$$\rho = U = e^2 + h^2 + p^2 + g^2, \quad J = S = 2eh;$$

v (25) имеет смысл скорости переноса энергии поля и не превышает скорость света в пустоте:

$$|v(x)| = \left| \frac{2eh}{e^2 + h^2 + p^2 + g^2} \right| \leq \frac{2|e||h|}{e^2 + h^2} \leq 1.$$

После преобразования фурье система (41) принимает вид (8):

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} e_k \\ h_k \\ p_k \\ g_k \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & k & 0 & -i\Omega \\ k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\omega_0 \\ i\Omega & 0 & -i\omega_0 & -i\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_k \\ h_k \\ p_k \\ g_k \end{pmatrix}.$$

Фигурирующая в правой части матрица – это L_k . Соответствующее ей характеристическое уравнение (10) выглядит так:

$$\omega^4 + i\gamma\omega^3 - (\Omega^2 + \omega_0^2 + k^2)\omega^2 - i\gamma k^2\omega + \omega_0^2 k^2 = 0. \quad (42)$$

Матрицы M_k и N_k , определяемые (19), имеют вид

$$M_k = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 & -i\Omega \\ k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\omega_0 \\ i\Omega & 0 & -i\omega_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Обратим внимание на то, что матрицы M_k и N_k не коммутируют, так что выражение $v_g(k)$, даваемое (28) и являющееся правой частью соотношения (35), не может быть заменено более простым выражением (31). Аналогичная ситуация имеет место и в случае граничной задачи: правая часть (40) не приводится к более простому выражению $\left[\frac{dk'(\omega)}{d\omega}\right]^{-1}$, однако именно эту величину в литературе [8, 9] применительно к диссипативной среде называют групповой скоростью и неправомерно ассоциируют со скоростью переноса энергии поля (напомним также, что ее модуль может превышать скорость света в пустоте в области частот, соответствующей аномальной дисперсии).

Легко видеть, что матрица $\frac{dM_k}{dk}$ не зависит от k и имеет всего два отличных от нуля элемента: $\left(\frac{dM_k}{dk}\right)_{12} = \left(\frac{dM_k}{dk}\right)_{21} = 1$. Соотношения (35) и (40), относящиеся к начальной и граничной задачам соответственно, принимают внешне одинаковый вид:

$$\frac{\langle S \rangle}{\langle U \rangle} = u_1^* u_2 + u_1 u_2^*,$$

где u_i ($i = 1, \dots, 4$) – компоненты матрицы-столбца u . Разными являются тип усреднения (см. выше) и способ получения вектора u при решении системы (9): для начальной задачи ω считается комплексной функцией вещественного k , а для граничной задачи k считается комплексной функцией вещественного ω , что соответствует двум разным типам решения одного и того же уравнения (42). С учетом условия нормировки (11) модуль этой величины не превышает единицу (скорость света):

$$\left| \frac{\langle S \rangle}{\langle U \rangle} \right| \leq 2|u_1||u_2| \leq |u_1|^2 + |u_2|^2 \leq |u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2 + |u_4|^2 = 1.$$

Таким образом, для диссипативной среды с материальным уравнением (2) получено выражение для скорости переноса энергии поля. Эта скорость не превышает скорость света в пустоте во всем диапазоне частот (включая область аномальной дисперсии).

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, Изв. вузов – Радиофизика **22**(10), 1223 (1979).
- [2] Ю. С. Бараш, В. Л. Гинзбург, УФН **118**, 523 (1976).
- [3] М. А. Микаэлян, УФН **168**, 1331 (1998).
- [4] М. А. Микаэлян, Краткие сообщения по физике ФИАН, № 7, 8 (1992).

- [5] В. Л. Гинзбург, *ЖЭТФ* **15**, 739 (1945).
- [6] В. Л. Гинзбург, *ЖЭТФ* **19**, 36 (1949).
- [7] К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер, *Квантовая теория поля* (М., Мир, 1984) [Claude Itzykson and Jean-Bernard Zuber. *Quantum Field Theory* (McGRAW-HILL BOOK COMPANY, NEW YORK – LONDON, 1980)].
- [8] Дж. А. Стрэттон, *Теория электромагнетизма* (М.-Л., ГИТТЛ, 1948) [Julius Adams Stratton. *Electromagnetic Theory* (McGRAW-HILL BOOK COMPANY, NEW YORK – LONDON, 1941)].
- [9] Дж. Джексон, *Классическая электродинамика* (М., Мир, 1965) [John David Jackson. *Classical Electrodynamics* (JOHN WILEY & SONS, INC., NEW YORK – LONDON, 1962)].

Поступила в редакцию 6 октября 2015 г.