УДК 530.1

ЭНТРОПИЙНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СОСТОЯНИЙ ЧАСТИЦ С ЕДИНИЧНЫМ СПИНОМ В ТОМОГРАФИЧЕСКОМ ВЕРОЯТНОСТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Я. А. Коренной, В. И. Манько

Получены новые энтропийные и информационные неравенства для матриц плотности и векторных томографических портретов состояний квантовых частиц с единичным спином.

Ключевые слова: скрытые корреляции, энтропийные неравенства, информационные неравенства, квантовая томография, спиновая томография.

Квантовые корреляции являются основой большинства квантовых технологий, таких как квантовые вычисления, квантовая криптография, квантовая телепортация, и т.д. [1].

Для классических функций распределения и классических наблюдаемых корреляции могут быть охарактеризованы информационными и энтропийными неравенствами (см., напр., [2]). Аналоги таких неравенств для матриц плотности квантовых составных систем дают информацию о наличии и степени корреляции [3–5] между подсистемами.

В работах [6–8] было показано, что квантовые корреляции, свойственные составным системам, также присущи и системам, не содержащим подсистем (неразделимым или несоставным системам). Такие корреляции предложено называть *скрытыми корреляциями* [9], и их также можно охарактеризовать с помощью аналогов энтропийных и информационных соотношений. Например, для матриц плотности единичных кудитов, являющихся неразделимыми системами, могут быть записаны аналоги свойства субаддитивности, свойства сильной субаддитивности или неравенства Араки–Либа [10].

Квантовая частица с единичным спином, движущаяся в пустом пространстве или внешнем поле, является типичным примером неразделимой (несоставной) системы, обладающей свойствами скрытых квантовых корреляций. В работе [11] для описания и томографии состояний этой системы мы предложили использовать неотрицательный

ФИАН, 119991 Россия, Москва, Ленинский пр-т, 53; e-mail: manko@sci.lebedev.ru.

девятикомпонентный векторный томографический портрет, содержащий без дублирования всю пространственную, спиновую и иную доступную информацию о состоянии системы.

Цель настоящей работы – получение новых энтропийных и информационных неравенств для матриц плотности состояний квантовых частиц с единичным спином, отражающих скрытые квантовые корреляции, и для векторных томографических портретов таких состояний.

Получим информационные и энтропийные неравенства для матриц плотности.

Состояния квантовых нерелятивистских частиц с единичным спином в общем случае могут быть описаны матрицами плотности в координатно-спиновом представлении

$$\{\rho_{jk}(\mathbf{q},\mathbf{q}',t)\} = \begin{pmatrix} \rho_{11}(\mathbf{q},\mathbf{q}',t) & \rho_{12}(\mathbf{q},\mathbf{q}',t) & \rho_{13}(\mathbf{q},\mathbf{q}',t) \\ \rho_{21}(\mathbf{q},\mathbf{q}',t) & \rho_{22}(\mathbf{q},\mathbf{q}',t) & \rho_{23}(\mathbf{q},\mathbf{q}',t) \\ \rho_{31}(\mathbf{q},\mathbf{q}',t) & \rho_{32}(\mathbf{q},\mathbf{q}',t) & \rho_{33}(\mathbf{q},\mathbf{q}',t) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$ – набор пространственных переменных, t – время, а индекс j соответствует определенной проекции спина на ось z так, что при $j = 1$ $s_z = 1$; при $j = 2$ $s_z = 0$; при $j = 3$ $s_z = -1$, а компоненты $\rho_{jk}(\mathbf{q},\mathbf{q}',t)$ удовлетворяют условиям эрмитовости и нормировки:

$$\rho_{jk}(\mathbf{q},\mathbf{q}',t) = \rho^*_{kj}(\mathbf{q}',\mathbf{q},t), \qquad \mathrm{Tr}\,\hat{\rho} = \int \sum_{j=1}^{3} \rho_{jj}(\mathbf{q},\mathbf{q},t)\, d^3q = 1, \tag{2}$$

и являются такими, что матрица (1) неотрицательно определена.

Поскольку набор диагональных элементов матрицы (1) по определению представляет собой совместную функцию распределения $\rho_{jj}(\mathbf{q},\mathbf{q},t)$ вероятности нахождения частицы в элементе объема d^3q с заданной проекцией спина на направление z, то функция $\rho_{jj}(\mathbf{q},\mathbf{q},t)$ удовлетворяет условию субаддитивности, которое мы можем записать как условие положительности взаимной информации

$$\begin{aligned} I_1(t) \;\; = \;\; & -\sum_{j=1}^{3}\left(\int \rho_{jj}(\mathbf{q},\mathbf{q},t)d^3q\right)\ln\left(\int \rho_{jj}(\mathbf{q},\mathbf{q},t)d^3q\right) - \\ & -\int\left(\sum_{j=1}^{3}\rho_{jj}(\mathbf{q},\mathbf{q},t)\right)\ln\left(\sum_{j=1}^{3}\rho_{jj}(\mathbf{q},\mathbf{q},t)\right)\, d^3q + \\ & +\sum_{j=1}^{3}\int \rho_{jj}(\mathbf{q},\mathbf{q},t)\ln\rho_{jj}(\mathbf{q},\mathbf{q},t)\, d^3q \geq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

причем это условие остается верным в процессе эволюции состояния во времени, и чтобы подчеркнуть в дальнейшем сохранение получаемых нами неравенств во времени, мы будем явно указывать время t в качестве аргумента.

Далее введем 3×3 матрицу $\hat{\mathcal{P}}$, определив ее как частичный след матрицы плотности $\hat{\rho}$ по пространственным переменным

$$\hat{\mathcal{P}}_{jk}(t) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{q}}\left\{\rho_{jk}(\mathbf{q},\mathbf{q}',t)\right\} = \int \rho_{jk}(\mathbf{q},\mathbf{q},t)\,d^3q, \tag{4}$$

и матрицу $\hat{\mathcal{R}}$, – как частичный след матрицы $\hat{\rho}$ по спиновым переменным,

$$\hat{\mathcal{R}}(\mathbf{q},\mathbf{q}',t) = \mathrm{Tr}_j\left\{\rho_{jk}(\mathbf{q},\mathbf{q}',t)\right\} = \sum_{j=1}^{3}\rho_{jj}(\mathbf{q},\mathbf{q}',t). \tag{5}$$

Так как матрица $\hat{\rho}$ вида (1) определена в пространстве, являющемся прямым произведением координатного и спинового подпространств, а матрицы $\hat{\mathcal{P}}$ и $\hat{\mathcal{R}}$ являются частичными следами по этим подпространствам, то имеет место условие субаддитивности для квантовой энтропии (см., напр., [12])

$$-\mathrm{Tr}\{\hat{\rho}(t)\ln\hat{\rho}(t)\} \le -\mathrm{Tr}\{\hat{\mathcal{P}}(t)\ln\hat{\mathcal{P}}(t)\} - \mathrm{Tr}\{\hat{\mathcal{R}}(t)\ln\hat{\mathcal{R}}(t)\}, \tag{6}$$

или условие для квантовой взаимной информации

$$I_2(t) = -\mathrm{Tr}\{\hat{\mathcal{P}}(t)\ln\hat{\mathcal{P}}(t)\} - \mathrm{Tr}\{\hat{\mathcal{R}}(t)\ln\hat{\mathcal{R}}(t)\} + \mathrm{Tr}\{\hat{\rho}(t)\ln\hat{\rho}(t)\} \ge 0. \tag{7}$$

Особо подчеркнем, что каждая из операций Tr в выражениях (6)–(7) берется по тому пространству, на котором определен соответствующий оператор (матрица) плотности, и выражения (6)–(7), в общем случае, нетривиальны для практических вычислений. Однако, если задача допускает (хотя бы с необходимой точностью) переход от континуального координатного представления к какому-нибудь дискретному конечномерному представлению (например, обрезанному фоковскому), то она кардинально упрощается.

Матрицу $\hat{\mathcal{P}}_{jk}(t)$ можно интерпретировать как матрицу плотности кутрита, поэтому ее компоненты должны удовлетворять информационным и энтропийным неравенствам, впервые полученным в работе [13] с помощью метода фиктивного разбиения на подсистемы (см. [8]) двух кубитов, суть которого заключается в следующем.

Сначала 3×3 матрица $\hat{\mathcal{P}}_{jk}(t)$ дополняется до матрицы 4×4 путем добавления к ней нулевого столбца справа и нулевой строки снизу. Далее, проделывается преобразование полученной двухиндексной 4×4 матрицы $\hat{\mathcal{P}}_{jk}(t)$ в четырехиндексную $2\times 2\times 2\times 2$

матрицу $\hat{\mathcal{P}}_{jklm}(t)$ с помощью следующего взаимно-однозначного обратимого отображения индексов: $1 \leftrightarrow 1,1$; $2 \leftrightarrow 1,2$; $3 \leftrightarrow 2,1$; $4 \leftrightarrow 2,2$. Интерпретируя итоговую матрицу $\hat{\mathcal{P}}_{jklm}(t)$ как матрицу плотности составной системы двух кубитов, взяв частичный след по первой или второй паре индексов, получают матрицы плотности первого и второго кубита

$$\hat{\rho}_1(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} + \mathcal{P}_{22} & \mathcal{P}_{13} \\ \mathcal{P}_{31} & \mathcal{P}_{33} \end{pmatrix}, \qquad \hat{\rho}_2(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} + \mathcal{P}_{33} & \mathcal{P}_{12} \\ \mathcal{P}_{21} & \mathcal{P}_{22} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Теперь, воспользовавшись свойством положительности взаимной информации двух подсистем

$$I_3(t) = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\mathcal{P}}(t)\ln\hat{\mathcal{P}}(t)\right\} - \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}_1(t)\ln\hat{\rho}_1(t)\right\} - \left\{\mathrm{Tr}\hat{\rho}_2(t)\ln\hat{\rho}_2(t)\right\} \geq 0, \tag{9}$$

можно написать информационное неравенство [13] (см. также [14]) для матричных элементов матрицы (4)

$$\begin{aligned} I_3(t) = \mathrm{Tr}\left\{\begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} & \mathcal{P}_{12} & \mathcal{P}_{13} \\ \mathcal{P}_{21} & \mathcal{P}_{22} & \mathcal{P}_{23} \\ \mathcal{P}_{31} & \mathcal{P}_{32} & \mathcal{P}_{33} \end{pmatrix} \ln \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} & \mathcal{P}_{12} & \mathcal{P}_{13} \\ \mathcal{P}_{21} & \mathcal{P}_{22} & \mathcal{P}_{23} \\ \mathcal{P}_{31} & \mathcal{P}_{32} & \mathcal{P}_{33} \end{pmatrix}\right\} - \\ -\mathrm{Tr}\left\{\begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} + \mathcal{P}_{22} & \mathcal{P}_{13} \\ \mathcal{P}_{31} & \mathcal{P}_{33} \end{pmatrix} \ln \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} + \mathcal{P}_{22} & \mathcal{P}_{13} \\ \mathcal{P}_{31} & \mathcal{P}_{33} \end{pmatrix}\right\} - \\ -\mathrm{Tr}\left\{\begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} + \mathcal{P}_{33} & \mathcal{P}_{12} \\ \mathcal{P}_{21} & \mathcal{P}_{22} \end{pmatrix} \ln \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} + \mathcal{P}_{33} & \mathcal{P}_{12} \\ \mathcal{P}_{21} & \mathcal{P}_{22} \end{pmatrix}\right\} \geq 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Другое неравенство для элементов матрицы (4) можно получить из условия неотрицательности относительной энтропии $H(\hat{\rho}_1(t)||\hat{\rho}_2(t))$ двух состояний $\hat{\rho}_1(t)$ и $\hat{\rho}_2(t)$, которая определяется следующим образом (см., напр., [12]):

$$H(\hat{\rho}_1(t)||\hat{\rho}_2(t)) = \mathrm{Tr}\{\hat{\rho}_1(t)[\ln\hat{\rho}_1(t) - \ln\hat{\rho}_2(t)]\} \geq 0. \tag{11}$$

Подставляя в (11) матрицы (8), получаем (здесь мы полагаем матрицы $\hat{\rho}_1$ и $\hat{\rho}_2$ такими, что относительная энтропия существует, т. е. $\mathrm{supp}\,\hat{\rho}_1 \subseteq \mathrm{supp}\,\hat{\rho}_2$)

$$\mathrm{Tr}\left\{\begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} + \mathcal{P}_{22} & \mathcal{P}_{13} \\ \mathcal{P}_{31} & \mathcal{P}_{33} \end{pmatrix}\left[\ln\begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} + \mathcal{P}_{22} & \mathcal{P}_{13} \\ \mathcal{P}_{31} & \mathcal{P}_{33} \end{pmatrix} - \ln\begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} + \mathcal{P}_{33} & \mathcal{P}_{12} \\ \mathcal{P}_{21} & \mathcal{P}_{22} \end{pmatrix}\right]\right\} \geq 0. \tag{12}$$

Если же $\mathrm{supp}\,\hat{\rho}_1 \nsubseteq \mathrm{supp}\,\hat{\rho}_2$, то относительная энтропия равна $+\infty$.

Теперь найдем информационные неравенства для векторного томографического портрета состояний квантовых частиц с единичным спином, введенного в нашей работе [11].

По аналогии с построением векторного томографического портрета для частиц со спином 1/2 [15], для частиц со спином 1 мы должны выбрать кворум из девяти состояний единичного спина $|\sigma_j, \mathbf{n}_j\rangle$ с заданными проекциями спина σ_j вдоль направлений $\mathbf{n}_j$, которые определят девятикомпонентный деквантайзер-вектор $\hat{\boldsymbol{\mathcal{U}}}$ с компонентами $\hat{\mathcal{U}}_j = |\sigma_j, \mathbf{n}_j\rangle\langle\sigma_j, \mathbf{n}_j|$ спиновых 3×3 матриц. Очевидно, что набор матриц $\{\hat{\mathcal{U}}_j\}$ должен быть линейно независимым.

С помощью деквантайзера $\hat{\boldsymbol{\mathcal{U}}}$ девятикомпонентная векторная томограмма определяется как [11]

$$\mathbf{w}(\chi, \eta, t) = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}(t)\left[\hat{U}(\chi, \eta) \otimes \hat{\boldsymbol{\mathcal{U}}}\right]\right\}, \tag{13}$$

где след вычисляется по всем переменным, включая спиновые индексы, и $\hat{U}(\chi, \eta)$ – агрегированное обозначение для бесспинового оптического или симплектического деквантайзера, определяемых формулами (14) или (15), χ – совокупность переменных томографического распределения, η – совокупность параметров томографии.

Напомним, что если мы имеем бесспиновую квантовую систему в N-мерном пространстве (в нашем случае $N = 3$), то деквантайзер для оптической томографии равен (см. [16]):

$$\hat{U}_w(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) = |\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}\,\rangle\langle\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}\,| = \prod_{n=1}^{N}\delta\left(X_n - \hat{q}_n\cos\theta_n - \hat{p}_n\frac{\sin\theta_n}{m_n\omega_n}\right), \tag{14}$$

где m_n и ω_n – константы размерности массы и частоты, которые выбираются из соображений удобства в зависимости от гамильтониана исследуемой системы, $|\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}\,\rangle$ – собственная функция оператора $\hat{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\theta})$ с компонентами $\hat{X}_n = \hat{q}_n\cos\theta_n + (\hat{p}_n\sin\theta_n)/(m_n\omega_n)$, соответствующая собственному значению $\mathbf{X}$.

Для деквантайзера симплектической томографии имеем [17]

$$\hat{U}_M(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}) = |\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}\,\rangle\langle\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}\,| = \prod_{\sigma=1}^{N}\delta(X_n - \hat{q}_n\mu_n - \hat{p}_n\nu_n), \tag{15}$$

где $|\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}\,\rangle$ – собственная функция оператора $\hat{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu})$ с компонентами $\hat{X}_n = \mu_n\hat{q}_n + \nu_n\hat{p}_n$, соответствующая собственному значению $\mathbf{X}$.

Каждая из компонент векторной оптической или симплектический томограмм $w_j(\chi, \eta, t)$ является функцией распределения оператора $\hat{\chi}(\eta)$ в момент времени t при условии, что частица имеет заданное значение проекции спина на заданное направление. Следовательно, для связанных состояний компоненты вектора $\mathbf{w}(\chi, \eta, t)$ должны быть интегрируемы по $d\chi$ и должны удовлетворять неравенствам

$$0 \le w_j(\chi,\eta,t) \le 1, \quad 0 \le \int w_j(\chi,\eta,t)\,d\chi \le 1, \quad j = 1,\ldots,\ 9. \tag{16}$$

Выберем девять положительных проекторов спиновых состояний следующим образом:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\mathcal{U}}} &= \Big(|s_z = 1\rangle\langle s_z = 1|,\ |s_z = 0\rangle\langle s_z = 0|,\ |s_z = -1\rangle\langle s_z = -1|,\\ &\quad |s_x = 1\rangle\langle s_x = 1|,\ |s_x = 0\rangle\langle s_x = 0|,\ |s_{xy} = 1\rangle\langle s_{xy} = 1|,\\ &\quad |s_{xy} = 0\rangle\langle s_{xy} = 0|,\ |s_{yz} = 0\rangle\langle s_{yz} = 0|,\ |s_{xz} = 0\rangle\langle s_{xz} = 0| \Big),\end{aligned} \tag{17}$$

где $|s_j = \pm 1,\ 0\rangle$ – собственная функция проекции спинового оператора на направление j, отвечающая собственному значению ± 1 или 0; и $|s_{xy}\rangle$, $|s_{yz}\rangle$, $|s_{xz}\rangle$ – собственные функции проекций оператора спина на направления $\mathbf{e}_{xy} = (1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2},\ 0)$, $\mathbf{e}_{yz} = (0,\ 1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$, $\mathbf{e}_{xz} = (1/\sqrt{2},\ 0,\ 1/\sqrt{2})$ соответственно.

Очевидно, что при таком определении (17) деквантайзера $\hat{\boldsymbol{\mathcal{U}}}$ три первые компоненты вектора $\mathbf{w}(\chi,\eta,t)$ нормированы условием $\int \sum_{j=1}^{3} w_j(\chi,\eta,t)\,d\chi = 1$, и функция $w_j(\chi,\eta,t)$ является совместной функцией распределения спинового индекса $j = 1, 2, 3$ и набора континуальных переменных χ при фиксированных параметрах η и t.

Введем два маргинальных распределения:

$$\Pi(\chi,\eta,t) = \sum_{j=1}^{3} w_j(\chi,\eta,t), \quad \mathfrak{P}_j(\eta,t) = \int w_j(\chi,\eta,t)\,d\chi, \quad j = 1,\ 2,\ 3, \tag{18}$$

первое – для континуальных переменных χ, а второе – для дискретной спиновой переменной $j = 1,\ 2,\ 3$. Из определения $\mathfrak{P}_j(\eta,t)$ очевидно, что оно не зависит от параметра η, и мы можем написать $\mathfrak{P}_j(\eta,t) = \mathfrak{P}_j(t)$. Тогда условие субаддитивности для распределения $w_j(\chi,\eta,t)$ при $j = 1, 2, 3$ будет иметь вид:

$$\begin{aligned} I_4(\eta,t) &= -\sum_{j=1}^{3} \mathfrak{P}_j(t) \ln \mathfrak{P}_j(t) - \int \Pi(\chi,\eta,t) \ln \Pi(\chi,\eta,t)\,d\chi + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{3} \int w_j(\chi,\eta,t) \ln w_j(\chi,\eta,t)\,d\chi \ge 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Также мы можем вывести энтропийное неравенство для всех девяти компонент векторного портрета $\mathbf{w}(\chi,\eta,t)$. Для этого введем формально следующее совместное (по отношению к переменным χ и j) распределение вероятности

$$\Omega_j(\chi,\eta,t)=\frac{w_j(\chi,\eta,t)}{\sum\limits_{k=1}^{9}\int w_k(\chi,\eta,t)\,d\chi},\quad j=1,\,2,\ldots,\,9, \tag{20}$$

нормированное условием $\sum_{j=1}^{9}\int\Omega_j(\chi,\eta,t)\,d\chi=1$, и маргинальные распределения $\widetilde{\Pi}(\chi,\eta,t)$ и $\widetilde{\mathfrak{P}}_j(t)$ такие, что

$$\widetilde{\Pi}(\chi,\eta,t)=\sum_{j=1}^{9}\Omega_j(\chi,\eta,t),\qquad \widetilde{\mathfrak{P}}_j(\eta,t)=\widetilde{\mathfrak{P}}_j(t)=\int\Omega_j(\chi,\eta,t)\,d\chi,\quad j=1,\,2,\ldots,\,9. \tag{21}$$

Тогда мы можем написать условие для взаимной информации

$$\begin{aligned} I_5(\eta,t) \;=\; & -\sum_{j=1}^{9}\widetilde{\mathfrak{P}}_j(t)\ln\widetilde{\mathfrak{P}}_j(t)-\int\widetilde{\Pi}(\chi,\eta,t)\ln\widetilde{\Pi}(\chi,\eta,t)\,d\chi+\\ & +\sum_{j=1}^{9}\int\Omega_j(\chi,\eta,t)\ln\Omega_j(\chi,\eta,t)\,d\chi\geq 0. \end{aligned} \tag{22}$$

В заключение отметим, что полученные нами энтропийные и информационные неравенства отражают скрытые квантовые корреляции, присущие рассматриваемой нами квантовой системе. Эти корреляции могут быть применимы в квантовых технологиях, подобно корреляциям в запутанных состояниях составных квантовых систем.

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000).

[2] A. S. Holevo, *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory* (North Holland, Amsterdam, 1982).

[3] E. H. Lieb and M. B. Ruskai, J. Math. Phys. **14**, 1938 (1973).

[4] M. B. Ruskai, J. Math. Phys. **43**, 4358 (2002); Erratum *ibid* **46**, 019901 (2005).

[5] M. A. Nielsen and D. A. Petz, Quantum Information & Computation **5**, 507 (2005).

[6] M. A. Man'ko and V. I. Man'ko, Int. J. Quantum Inf. **12**, 156006 (2014).

[7] M. A. Man'ko and V. I. Man'ko, J. Russ. Laser Res. **36**, 301 (2014).

[8] M. A. Man'ko and V. I. Man'ko, Entropy **17**, 2876 (2015).

[9] M. A. Man'ko and V. I. Man'ko, J. Russ. Laser Res. **36**, 301 (2015).
[10] H. Araki and E. H. Lieb, Commun. Math. Phys. **18**, 160 (1970).
[11] Ya. A. Korennoy and V. I. Man'ko, Int. J. Theor. Phys. **55**, 4885 (2016).
[12] А. С. Холево, *Введение в квантовую теорию информации* (М., МЦНМО, 2002).
[13] V. N. Chernega and V. I. Man'ko, J. Russ. Laser Res. **28**, 103 (2007).
[14] M. A. Man'ko and V. I. Man'ko, J. Phys.: Conf. Ser. **698**, 012004 (2016).
[15] Ya. A. Korennoy and V. I. Man'ko, J. Russ. Laser Res. **36**, 534 (2015).
[16] G. G. Amosov, Ya. A. Korennoy, and V. I. Man'ko, Phys. Rev. A **85**, 052119 (2012).
[17] O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, and G. Marmo, J. Phys. A **35**, 699 (2002).

Поступила в редакцию 30 марта 2016 г.