УДК 534.2

МЕТОД ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ РАССЕЯНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН

В. П. Дзюба[1], Р. В. Ромашко[1], И. Н. Завестовская[2,3], Ю. Н. Кульчин[1,3]

В статье предлагается обобщение известного в квантовой механике метода фазовых функций на задачи рассеяния акустических волн на неоднородностях сплошной среды. В основе идеи использования указанного метода в акустике лежит то, что волновое уравнение для звукового потенциала или давления в неоднородной среде специальной подстановкой сводится к уравнению Шредингера с переменным потенциалом рассеянного поля.

Ключевые слова: рассеяние акустических волн, метод фазовых функций.

Метод фазовых функций хорошо известен в квантовой механике [1, 2]. Идея его использования в акустике основывается на том, что волновое уравнение для акустического давления в неоднородной среде [3], которое имеет вид:

$$\frac{1}{c(\vec{r})^2}\frac{\partial^2 P(\vec{r},t)}{\partial t^2} + \Delta P(\vec{r},t) + \left[\nabla P(\vec{r},t) + \vec{f}(\vec{r},t)\right]\nabla \ln \rho(\vec{r}) = \nabla \vec{f}(\vec{r},t), \tag{1}$$

где $\rho(\vec{r})$ – плотность среды, $c(\vec{r})$ – скорость звука в ней, а $\vec{f}(\vec{r},t)$ – объемная плотность силы, возбуждающей акустическое поле в среде, подстановкой $P(\vec{r},t) = \sqrt{\frac{\rho(\vec{r})}{\rho(\vec{r}_0)}}U(\vec{r},t)$ сводится к уравнению, формально тождественному стационарному уравнению Шредингера для частицы в потенциальном поле $v(\vec{r})$. В области вне источников поля уравнение (1) принимает следующий вид:

$$\frac{1}{c^2(\vec{r})}\frac{\partial^2 U(\vec{r},t)}{\partial t^2} - \Delta U(\vec{r},t) + \left[\frac{3\nabla\rho(\vec{r})\nabla\rho(\vec{r})}{4\rho^2(\vec{r})} - \frac{\Delta\rho(\vec{r})}{2\rho(\vec{r})}\right]U(\vec{r},t) = 0. \tag{2}$$

Для спектральных составляющих $U(\vec{r},\omega)$ это уравнение переходит к виду:

$$\Delta U(\vec{r},\omega) + k_0^2 U(\vec{r},\omega) = v(\vec{r})U(\vec{r},\omega), \tag{3}$$

[1] Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, 690041 Россия, Владивосток, ул. Радио, 5; e-mail: vdzyuba@iacp.dvo.ru.

[2] ФИАН, 119991 Россия, Москва, Ленинский пр-т, 53.

[3] Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, 115409 Россия, Москва, Каширское ш., 31.

где квадрат волнового вектора $k_0^2 = \omega^2/c^2(\vec{r}_0)$ – аналог энергии частицы, $c(r_0)$ – скорость звука в некоторой точке пространства, относительно которой определяется изменение параметров среды, а потенциал

$$v(\vec{r}) = k_0^2 - \frac{\omega^2}{c^2(\vec{r})} + \left[\frac{3\nabla\rho(\vec{r})\nabla\rho(\vec{r})}{4\rho^2(\vec{r})} - \frac{\Delta\rho(\vec{r})}{2\rho(\vec{r})}\right]. \quad (4)$$

Пусть в среде имеется локализованная неоднородная область, на которой происходит рассеяние звукового поля. Поместим начало координат внутрь этой неоднородной области. Вдали от неё поле можно представить суперпозицией падающей на область плоской волны и рассеянной на потенциале $v(\vec{r})$ сферической волны [1–4] $U(\vec{r},\omega) = e^{i\vec{k}_0\vec{r}} + F(\theta,\varphi)e^{ik_0 r}/r$, где $k_0 = \omega/c(\vec{r}_0)$. Комплексная амплитуда рассеянного поля $F(\theta,\varphi)$ определяет дифференциальное $d\sigma = |F(\theta,\varphi)|^2 d\Omega$ и полное сечения рассеяния звука $\sigma = \int\limits_{4\pi} d\sigma$ на потенциале $v(\vec{r})$. Если потенциал сферически симметричен, то решение уравнения (3) допускает разделение переменных, которое можно представить в виде суперпозиции парциальных волн, соответствующих определенным значениям постоянной разделения переменных ℓ. Для радиальной составляющей парциальной волны $\eta_\ell(r)$ имеет силу уравнение [см., напр., 1, 2]

$$\frac{d^2\eta_\ell(r)}{dr^2} + \left[k_0^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - v(r)\right]\eta_\ell(r) = 0, \quad (5)$$

где ℓ принимает целые положительные значения. Амплитуда $F(\theta) = \frac{1}{k_0}\sum\limits_{\ell=0}^{\infty}(2\ell + 1)\exp(i\delta_\ell)\sin\delta_\ell P_\ell(\cos\theta)$ вследствие симметрии является функцией только полярного угла θ, отсчитываемого от направления падения волны, и выражается через фазы рассеяния δ_ℓ [1, 2 и др.]. На больших расстояниях от рассеивающей области, если потенциал $v(r)$ убывает быстрее, чем $O(r^{-1})$, $\eta_\ell(r) \approx \sin(k_0 r - \ell\pi/2 + \delta_\ell)$, а полное сечение рассеяния равно $\sigma = \frac{4\pi}{k_0^2}\sum\limits_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\sin^2\delta_\ell$. Метод фазовых функций заключается в переходе от уравнения (3) к уравнению непосредственно для фазы рассеяния. Для этого будем искать $\eta_\ell(r)$ через функции Риккати–Бесселя $i_\ell(k_0 r)$ и $n_\ell(k_0 r)$, являющиеся решениями свободного уравнения (3) в виде $\eta_\ell(r) = A_\ell(r)[i_\ell(k_0 r)\cos\delta_\ell - n_\ell(k_0 r)\sin\delta_\ell]$. В дальнем поле модуль вектора плотности потока энергии парциальной составляющей акустического поля $I_\ell \approx \eta_\ell(r)\frac{d\eta_\ell(r)}{dr} = A_\ell^2(r)\sin(k_0 r - \ell\pi/2 + \delta_\ell)\cos(k_0 r - \ell\pi/2 + \delta_\ell)$. Для этого необходимо выполнение следующего условия: $\frac{d}{dr}\eta_\ell(r) = A_\ell(r)\left[\frac{d}{dr}i_\ell(k_0 r)\cos\delta_\ell - \frac{d}{dr}n_\ell(k_0 r)\sin\delta_\ell\right]$, которое совместно с уравнением (5) приводит к следующим уравнениям для фазы рассеяния δ_ℓ и амплитуды $A_\ell(r)$:

$$\frac{d}{dr}\delta_\ell(r) = -\frac{1}{k_0}v(r)[i_\ell(k_0 r)\cos\delta_\ell - n_\ell(k_0 r)\sin\delta_\ell]^2, \quad \delta_\ell(0) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{d}{dr}A_\ell(r) = -\frac{1}{k_0}A_\ell(r)v(r)[i_\ell(k_0r)\cos\delta_\ell - n_\ell(k_0r)\sin\delta_\ell][i_\ell(r)\sin\delta_\ell + n_\ell(k_0r)\cos\delta_\ell]. \quad (7)$$

Если потенциал имеет аксиальную симметрию, то, вводя цилиндрическую систему координат (ρ, φ, z) и представляя полное поле в виде суммы падающей и рассеянной волн $e^{ik_0\rho\cos\varphi} + f(\varphi)e^{ik_0\rho}/\sqrt{\rho}$, можно записать радиальную составляющую парциальной волны через суперпозицию функций Бесселя и Неймана в виде $R_m = A_m(r)[J_m(k_0\rho)\cos\delta_m - N_m(k_0r)\sin\delta_m]$ с асимптотикой $R_m \approx \frac{1}{\sqrt{k_0\rho}}\cos(k_0\rho - m\pi/2 - \pi/4 + \delta_m)$, где δ_m – фаза рассеяния. Повторяя рассуждения, изложенные выше, мы придем к следующим уравнениям для фазы и амплитуды, справедливым в случае цилиндрической симметрии рассеивающей области среды:

$$\frac{d}{dr}\delta_m(r) = -\frac{\pi}{2_0}\rho v(r)[J_m(k_0r)\cos\delta_m - N_m(k_0r)\sin\delta_m]^2, \;\; \delta_m(0) = 0, \;\; \delta_m(\infty) = \delta_m,$$

$$\frac{d}{dr}A_m(r) = -\frac{\pi}{2}\rho A_m(r)v(r)[J_m(k_0r)\cos\delta_m - N_m(k_0r)\sin\delta_m][J_m(k_0r)\sin\delta_m + N_m(k_0r)\cos\delta_m].$$

При этом сечение рассеяния $\sigma = \frac{4}{k_0}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\sin^2\delta_m$, где $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_m = 2$, $m = 1, 2, \ldots$. Фазовое уравнение является хорошо изученным нелинейным уравнением Риккати. В отличие от него, уравнения для амплитудной функции $A_m(r)$ или $A_\ell(r)$ линейны и могут быть проинтегрированы в явном виде.

Для использования приведенных уравнений в различных прикладных задачах принципиальным является вопрос о количестве парциальных составляющих, которые необходимо учитывать. Если величина $\ell(\ell+1)/r^2$ или m^2/ρ^2 (в случае цилиндрической симметрии) в радиальном уравнении существенно больше потенциала рассеяния $v(r)$, то движение волн можно считать свободным, практически неподверженным рассеянию. Если, наоборот, потенциал $v(r)$ существенно больше, то поле испытывает сильное рассеяние. Из этих рассуждений вытекает неравенство для определения числа суммируемых парциальных составляющих $v(r) \geq \ell(\ell+1)/r^2$ или m^2/r^2. Величина r определяет размеры области вокруг начала координат, которая в рассеяние волн вносит незначительный вклад по сравнению с внешней областью. В случае, когда $|v(r)| << 1$, достаточно использовать одну или две парциальные составляющие с $\ell, m = 0, 1$. Для потенциала $v(r) > 0$ (например, скорость звука $c(r) > c_0$) производная фазы и сама фаза отрицательна. В области, где $v(r) < 0$, фаза и ее производная положительна. Важно и то, что, интегрируя фазовое уравнение, мы можем, выбирая значения ℓ, наблюдать эффект действия различных областей неоднородности. Рассмотрим рассеяние звука на сферической области (шаре) малого радиуса d такого, что

$k_0 d < 1$. Пусть шар жесткий и внутри однороден. При этом, $v(r) \approx k_0^2$, и фазовое уравнение (6) при $\ell = 0$ заменой $\sin\delta_0(r) \approx \delta_0(r)$ преобразовывается в следующее: $\delta_0(d) \approx -(k_0 d)^3/3 - k_0 \int\limits_0^d \delta_0(r)dr$. В силу монотонности фазы и условия $\delta_\ell(0) = 0$ интеграл можно положить равным $\delta_0(d)k_0 d/2$. И для фазы рассеяния на всем объеме шара получаем $\delta_0(d) \approx -(k_0 d)^3[1 - k_0 d/2 + (k_0 d)^2/4 + \ldots]/3$, а полное сечение рассеяния $\sigma = \frac{4\pi d^2}{9}(k_0 d)^4(1 + k_0 d + \ldots)^2$. Если шар мягкий, то внутри шара, где $r \leq d$ и $k_0 r < 1$, для фазы можно положить $\delta_0(r) \approx k_0 r$. При рассеивании на всем шаре $\delta_0(d) \approx k_0 d$, а полное сечение рассеяния (эффективный поперечник рассеяния) равно $\sigma = 4\pi d^2$. Полученные значения полного сечения рассеяния, которые в акустике часто именуются эффективным поперечником рассеяния, близки (твердый шар) либо полностью совпадают (мягкий шар) со значениями, полученными при прямом решении соответствующей краевой волновой задачи [4 и др.].

Метод фазовых функций легко обобщается на одномерное распространение поля (прохождение волн сквозь одномерный потенциал) и на среду с поглощением (комплексный потенциал). Полезность этого метода в том, что он позволяет свести задачу к решению хорошо изученных уравнений в обыкновенных производных, а не к решению краевой задачи для волнового уравнения с переменными коэффициентами. Во-вторых, этот метод позволяет исследовать и промоделировать вклад различных областей рассеивающих объектов в полное рассеянное поле.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-12-01122).

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Бабиков, *Метод фазовых функций в квантовой механике* (М., Наука, 1976).

[2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифщиц, *Квантовая механика* (М., Физматлит, 2002).

[3] Л. М. Бреховских, *Волны в слоистых средах* (М., Изд-во АН СССР, 1957).

[4] Л. Ф. Лепендин, *Акустика* (М., Высш. Школа, 1978).

Поступила в редакцию 17 ноября 2014 г.