УДК 537.872

УТОЧНЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ МОЩНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ, СОВЕРШАЮЩЕЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

В. В. Лидский

В рамках классической электродинамики предложены точные формулы для вычисления радиационных потерь энергии точечного заряда, совершающего гиперболическое движение, включая релятивистский участок. Для ультрарелятивистской частицы получено уточнение коэффициента радиационных потерь: $\frac{4}{5}\gamma^2 \cdot e^2 \cdot a^2$ *вместо обычно принимаемого ларморовского значения* $\frac{2}{3}e^2 \cdot a^2$.

1. Введение. 1.1. Гиперболическим называют движение частицы, при котором она испытывает постоянное ускорение в сопутствующей системе отсчета. Обозначив величину этого ускорения λ и выбрав надлежащим образом систему координат, уравнение мировой линии частицы можно записать в виде:

$$z^i = \{\lambda^{-1}\ \mathrm{sh}(\lambda\sigma); 0; 0; \lambda^{-1} \cdot \mathrm{ch}(\lambda\sigma)\}, \tag{1.1}$$

где σ – естественная параметризация мировой линии или "собственное время" частицы.

Гиперболическое движение часто называют движением "равноускоренного заряда", однако этот термин нам представляется менее удачным, так как в системе отсчета неподвижного наблюдателя (в лабораторной системе) только на нерелятивистском участке частица движется равноускоренно.

В 1909 г. Борн начал обсуждение темы гиперболического движения заряженной частицы, предложив решение уравнений Максвелла для этого случая [1]. Не имея возможности делать здесь обстоятельный разбор высказывавшихся точек зрения, сошлемся на обзор Гинзбурга [2] (см. также [3] и имеющуюся там библиографию), где вопрос об излучении заряда при равноускоренном движении назван среди "вечных вопросов".

В недавно опубликованной серии работ Эриксена и Грона [4] предпринята попытка представить все ключевые идеи, высказанные в течение многолетнего обсуждения этой темы. Там же можно найти обширную библиографию.

Ряд работ, опубликованных в последнее время, рассматривают гиперболическое движение с точки зрения принципов общей теории относительности [5].

При вычислении мощности излучения заряда, как правило, исходят из нерелятивистской формулы Лармора:

$$I = \frac{2}{3} \cdot e^2 \cdot \lambda^2, \tag{1.2}$$

а затем с помощью преобразований Лоренца получают величину потерь энергии частицей, движущейся с произвольной скоростью. Однако ряд авторов (в их числе Гуревич [6], а также Фултон и Рёрлих [7]) подчеркивают, что излучаемые заряженной частицей энергия и импульс не образуют 4-вектора относительно преобразований Лоренца, а потому вывод величины потерь из формулы (1.2) неправомочен.

Здесь ситуация подобна той, которая возникла при изучении магнитотормозного (синхротронного) излучения. В работах Гинзбурга с коллегами [8, 9] было показано, что вычисление излучения релятивистской частицы через преобразование Лоренца энергии и импульса, вычисленных в сопутствующей системе, приводит к неверному результату.

В данной работе мы вычислим мощность излучения движущейся гиперболически частицы на произвольном участке траектории. Мы не будем делать предположений о нерелятивистском характере движения. Затем обсудим полученный результат.

1.2. Для вычисления мощности электромагнитного излучения частицы вычислим поток тензора энергии-импульса поля через поверхность сферы **S**. Наблюдателя, относительно которого сфера **S** неподвижна, будем называть лабораторным. Центр сферы поместим вблизи мировой линии частицы (см. ниже рис. 1), а радиус R выберем достаточно большим. Будем предполагать, что поле частицы определяется запаздывающими потенциалами Лиенара–Вихерта [10, 11]. Соответствующие напряженности электромагнитного поля F^{ik} представим в виде:

$$F^{ik} = \frac{e}{(\chi^j \cdot w_j)^3} \cdot (\chi^i \cdot w^k - w^i \cdot \chi^k) \cdot (1 - \chi^m a_m) + \frac{e}{(\chi^j \cdot w_j)^2} \cdot (\chi^i \cdot a^k - a^i \cdot \chi^k), \tag{1.3}$$

где w^i, a^i – 4-скорость и 4-ускорение частицы, а $\chi^i = \xi^i - z^i$– светоподобный 4-вектор из "точки излучения" z^i в "точку наблюдения" ξ^i.

Здесь и далее мы будем придерживаться обозначений, принятых в [10]. Латинские индексы пробегают значения $i = (0, 1, 2, 3)$. Индекс тензора, обозначенный греческими буквами α, β, γ, пробегает значения пространственных координат (1, 2, 3). Опускание и

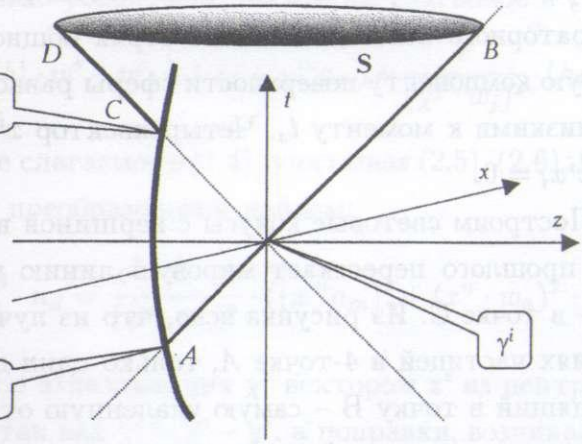

Рис. 1. *Мировая линии частицы (AC) и удаленная неподвижная сфера* **S**, *с центром в 4-точке* γ^i. *"Точки излучения" для всей сферы* **S** *расположены на участке AC.*

поднятие индексов происходит с помощью свертки с метрическим тензором Минковского $g^{ik} = (+---)$. Этот же тензор используется и при поднятии индекса у трехмерных векторов, так что $x_\alpha = -x^\alpha$. Скорость света принята равной единице ($c = 1$).

Для тензора энергии-импульса примем формулу Максвелла–Хевисайда [10, 11]:

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(-F^{il}F_l^k + \frac{1}{4}g^{ik}F_{lm}F^{lm}\right). \tag{1.4}$$

2. Поток тензора энергии-импульса через удаленную сферу.

2.1. Пусть центр сферы расположен на прямой, вдоль которой движется частица. 4-координаты центра сферы обозначим γ^i:

$$\gamma^i = \{t_s; 0; 0; d\}. \tag{2.1}$$

Обозначим y^i – 4-вектор из центра сферы в точку нахождения частицы:

$$y^i = z^i - \gamma^i. \tag{2.2}$$

Для вычисления интеграла по сфере **S** определим вектор x^i из 4-центра сферы γ^i к точке наблюдения ξ^i, пробегающей поверхность **S**:

$$x^i = \xi^i - \gamma^i.$$

Вся поверхность сферы **S** находится в 3-гиперплоскости событий, одновременных в системе отсчета лабораторного наблюдателя. Не теряя общности рассуждений, мы можем выбрать временную компоненту поверхности сферы равной $t_s + R$, тогда "точки излучения" окажутся близкими к моменту t_s. Четырехвектор x^i в этом случае оказывается светоподобным: $x^i x_i = 0$.

Рассмотрим рис. 1. Построим световые конусы с вершиной в центре сферы γ^i. Поверхность абсолютного прошлого пересекает мировую линию частицы в точке А, а абсолютного будущего – в точке С. Из рисунка ясно, что из лучей света, испущенных в различных направлениях частицей в 4-точке A, только один достигнет поверхности А сферы **S** – луч приходящий в точку В – самую удаленную от мировой линии точку поверхности 4-сферы. Тогда как из лучей, испущенных из 4-точки С, только луч CD достигнет поверхности 4-сферы, причем D – ближайшая к мировой линии точка сферы. Кроме того легко увидеть, что для всех "4-точек наблюдения" на поверхности сферы **S** "точки излучения" z^i лежат на участке мировой линии АС, представляющем собой множество точек, отделенных от центра сферы γ^i пространственноподобным интервалом. Таким образом, для всех "точек излучения" имеет место:

$$y^i \cdot y_i \leq 0. \tag{2.3}$$

Мощность излучения частицы выражается через полный поток тензора энергии-импульса через сферу **S**:

$$\frac{dP^i}{dt} = \oint\limits_{\mathbf{S}} T^{ik} \cdot n_k \cdot dS, \tag{2.4}$$

где n_k – 4-вектор внешней нормали к поверхности сферы:

$$n_i = -\frac{1}{R}\,\{0; x_1; x_2; x_3\}. \tag{2.5}$$

Временная компонента нормали обращается в ноль, так как сферу **S** мы считаем неподвижной. Знак минус в (2.5) выбран для того, чтобы поток вектора, направленного вовне сферы, был положительным (напр., вектор x^i).

2.2. Вычислим подынтегральное выражение в (2.4) с помощью формул (1.3) и (1.4). При этом будем оставлять только члены, убывающие с расстоянием как R^{-2}. Во-первых, заметим, что свертка 4-тензора F^{ik} с 4-вектором запаздывания χ^i убывает как R^{-1}:

$$h^i = F^{ik} \cdot \chi_k = \frac{e}{(\chi^j \cdot u_j)^2} \cdot \chi^i \sim R^{-1}. \tag{2.6}$$

Свернув (1.3) с F^{ik}, легко убедиться, что второе слагаемое в (1.4) убывает как R^{-3}:

$$F^{ik}\cdot F_{ik}=\frac{e}{(\chi^j\cdot w_j)^3}\cdot(h^i_k\cdot w^k+w^i\cdot h_i)\cdot(1-\chi^m a_m)+\frac{e}{(\chi^j\cdot w_j)^2}\cdot(h_k\cdot a^k+a^i\cdot h_i)\sim R^{-3}. \quad (2.7)$$

Преобразуем первое слагаемое в (1.4), учитывая (2.5), (2.6). Оставляя члены порядка R^{-2}, после несложных преобразований найдем:

$$F^{ik}F^{\beta}_k\cdot n_\beta=\frac{e^2\cdot R\cdot x^i}{(x^n\cdot w_n)^6}\cdot((x^m a_m)^2+(x^n\cdot w_n)^2\cdot a^k\cdot a_k),$$

где мы заменили вектор запаздывания χ^i вектором x^i из центра сферы в точку наблюдения. Это возможно, так как $\chi^i=x^i-y^i$, а поправки, возникающие при учете вектора y^i, исчезающе малы при больших радиусах сферы $R(|y^i|<<R)$.

Элемент интегрирования $d\mathbf{S}$ в (2.4) выразим через дифференциалы углов $d\theta, d\varphi$ в полярной системе координат, начало которой поместим в центре сферы, а полярную ось направим вдоль линии движения частицы:

$$\frac{dP^i}{dt}=-\frac{1}{4\pi}\cdot\int\limits_0^\pi R^2\cdot\sin\theta\cdot d\theta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\cdot\frac{e^2\cdot R\cdot x^i}{(x^n\cdot w_n)^6}\cdot((x^m a_m)^2+(x^n\cdot w_n)^2\cdot a^k\cdot a_k). \quad (2.8)$$

2.3. При вычислении интеграла (2.8) необходимо учитывать, что величины w^i, a^i представляют собой скорость и ускорение частицы в "точках излучения", и следовательно, имеют различные значения для различных точек сферы $\mathbf{S}$.

Рассмотрим на мировой линии частицы некоторую точку z^i. Найдем на поверхности сферы $\mathbf{S}$ множество "точек наблюдения", для которых z^i является "точкой излучения". На рис. 2 изображена удаленная сфера $\mathbf{S}$, ее центр γ^i и точка излучения z^i, причем вектор $y^i=z^i-\gamma^i$ имеет компоненты:

$$y^i=\{y^0;0;0;y^3\}. \quad (2.9)$$

Из рис. 2 ясно, что луч света из 4-точки z^i достигает поверхности $\mathbf{S}$ в момент t_s+R в том и только в том случае, когда он направлен под фиксированным углом θ к направлению на частицу, причем в приближении $R>>y^3$ мы можем считать $AP=OP=R$, и угол θ задается простым выражением:

$$\cos\theta=\frac{y^0}{y^3}, \quad (2.10)$$

причем излучение достигает поверхности $\mathbf{S}$ в том и только в том случае, если $y^0\le y^3$, что находится в соответствии с выражением (2.3), полученным в 4-геометрии.

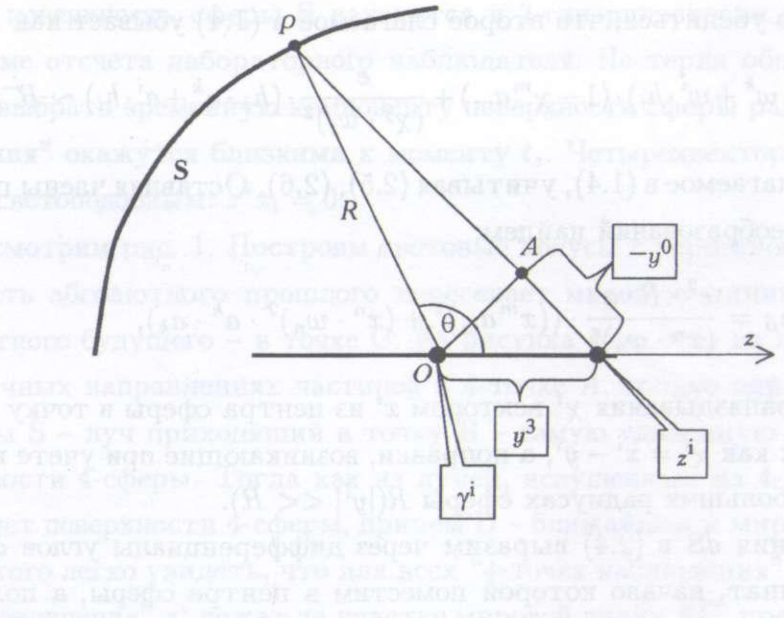

Рис. 2. *Удаленная сфера* **S** *и траектория частицы (ось z). Испущенный частицей луч света из точки z^i достигает поверхности* **S** *одновременно с лучом OP из 4-центра сферы γ^i, если он направлен под углом θ, таким, что $y^0 = y^3 \cdot cos\theta$.*

Вектор x^i имеет компоненты

$$x^i = R \cdot \{1; \sin\theta \cdot \cos\varphi; \sin\theta \cdot \sin\varphi; \cos\theta\}, \tag{2.11}$$

а выражения для w^i и a^i получим, дифференцируя (1.1):

$$w^i = \{\mathrm{ch}(\lambda \cdot \sigma); 0; 0; \mathrm{sh}(\lambda \cdot \sigma)\} \quad a^i = \lambda \cdot \{\mathrm{sh}(\lambda \cdot \sigma); 0; 0; \mathrm{ch}(\lambda \cdot \sigma)\}. \tag{2.12}$$

Как видно из (2.11)–(2.12), свертки в подынтегральном выражении (2.8) не зависят от угла φ, следовательно, интегрирование по $d\varphi$ тривиально.

$$\frac{dP^i}{dt} = \frac{e^2 \cdot \lambda^2}{2} \cdot \int\limits_0^\pi \sin\theta \cdot d\theta \cdot \frac{v^i \cdot (1 - \cos^2\theta)}{(\mathrm{ch}(\lambda \cdot \sigma) - \cos\theta \cdot \mathrm{sh}(\lambda \cdot \sigma))^6}, \tag{2.13}$$

где для удобства записи введен вектор

$$v^i = \{1; 0; 0; \cos\theta\}. \tag{2.14}$$

Величина σ в знаменателе (2.13) связана с θ неявной зависимостью, которую мы найдем из (2.10), учитывая (2.1) и (2.2):

$$\cos\theta = \frac{\lambda^{-1} \cdot \mathrm{sh}(\lambda \cdot \sigma) - t_s}{\lambda^{-1} \cdot \mathrm{ch}(\lambda \cdot \sigma) - d}. \tag{2.15}$$

Отсюда находим уравнение для σ:

$$\cos\theta \cdot \mathrm{ch}(\lambda \cdot \sigma) - m = \mathrm{sh}(\lambda \cdot \sigma), \tag{2.16}$$

где введено обозначение

$$m = \lambda \cdot (d \cdot \cos\theta - t_s). \tag{2.17}$$

Обозначим $q = \mathrm{ch}(\lambda \cdot \sigma)$ и, возведя в квадрат (2.16), придем к уравнению для q:

$$\sin^2\theta \cdot q^2 + 2 \cdot m \cdot \cos\theta \cdot q - (1 + m^2) = 0. \tag{2.18}$$

Положительный корень (2.18) определяется выражением:

$$q = \frac{-m \cdot \cos\theta + \sqrt{m^2 + \sin^2\theta}}{\sin^2\theta}. \tag{2.19}$$

Теперь из (2.16) и (2.19) находим выражение для знаменателя (2.13):

$$\mathrm{ch}(\lambda \cdot \sigma) - \cos\theta \cdot \mathrm{sh}(\lambda \cdot \sigma) = q \cdot (1 - \cos^2\theta) + \cos\theta \cdot m = \sqrt{m^2 + \sin^2\theta}. \tag{2.20}$$

Сравнивая (2.20) с (2.13), приходим к следующему выражению для излучения:

$$\frac{dP^i}{dt} = \frac{e^2 \cdot \lambda^2}{2} \cdot \int\limits_0^\pi \sin\theta \cdot d\theta \frac{v^i \cdot \sin^2\theta}{(\lambda^2 \cdot (d \cdot \cos\theta - t_s)^2 + \sin^2\theta)^3}. \tag{2.21}$$

Вычисление интеграла (2.21) слегка упрощается, если дополнительно предположить, что центр сферы **S** расположен на мировой линии частицы (1.1), в 4-точке с некоторым значением параметра $\sigma = \psi$:

$$t_s = \lambda^{-1} \cdot \mathrm{sh}(\lambda\psi); \quad d = \lambda^{-1} \cdot \mathrm{ch}(\lambda\psi). \tag{2.22}$$

Тогда из (2.21) и (2.22) легко получить:

$$\frac{dP^0}{dt} = \frac{e^2 \cdot \lambda^2}{2} \int\limits_0^\pi \sin\theta \cdot d\theta \frac{\sin^2\theta}{(\mathrm{ch}(\lambda\psi) - \cos\theta \cdot \mathrm{sh}(\lambda\psi))^6}, \tag{2.23}$$

$$\frac{dP^3}{dt} = \frac{e^2 \cdot \lambda^2}{2} \cdot \int\limits_0^\pi \sin\theta \cdot d\theta \frac{\cos\theta \cdot \sin^2\theta}{(\mathrm{ch}(\lambda\psi) - \cos\theta \cdot \mathrm{sh}(\lambda\psi))^6}. \tag{2.24}$$

Подынтегральное выражение в (2.23) представляет собой угловое распределение энергии излучения. Интегралы (2.23) и (2.24) могут быть вычислены заменой $\xi = \cos\theta$, а затем интегрированием по частям. В результате находим:

$$\frac{dP^0}{dt} = \frac{2 \cdot e^2 \cdot \lambda^2}{15} \cdot (\mathrm{sh}^2(\lambda\psi) + 5 \cdot \mathrm{ch}^2(\lambda\psi)), \tag{2.25}$$

$$\frac{dP^3}{dt} = \frac{4 \cdot e^2 \cdot \lambda^2}{5} \cdot (\mathrm{ch}(\lambda\psi) \cdot \mathrm{sh}(\lambda\psi)). \tag{2.26}$$

Поскольку мы выбрали 4-центр сферы на мировой линии частицы в точке $\sigma = \psi$, то ясно, что весь поток энергии на сфере **S** соответствует "точке излучения" $\sigma = \psi$. При этом из (2.25) видно, если точка ψ выбрана на нерелятивистском участке мировой линии (то есть $\lambda\psi << 1$), то (2.25) сводится к формуле Лармора:

$$\frac{dP^0}{dt} = \frac{2 \cdot e^2 \cdot \lambda^2}{3}. \tag{2.27}$$

Однако, если выбрать ψ на ультрарелятивистском участке (где $\mathrm{ch}(\lambda\psi) >> 1$), то безразмерный коэффициент становится иным:

$$\frac{dP^0}{dt} = \frac{4 \cdot e^2 \cdot \lambda^2}{5} \cdot \gamma^2, \tag{2.28}$$

где $\gamma = \mathrm{ch}(\lambda \cdot \psi) = \dfrac{K}{m}$ – релятивистский фактор – отношение кинетической энергии частицы к массе покоя.

3. Обсуждение результатов.

Первый вопрос, возникающий в связи с формулами (2.27) и (2.28), это вопрос о релятивистской инвариантности полученного результата. Действительно, с помощью замены переменной

$$dt = \mathrm{ch}(\lambda \cdot \psi) \cdot d\psi \tag{3.1}$$

можно перейти к дифференцированию 4-вектора энергии-импульса P^i по инвариантному "собственному времени" частицы $d\psi$. При этом в правой части возникает выражение, изменяющее свое значение при переходе к системе отсчета наблюдателя, движущегося относительно лабораторной системы.

Однако парадокс этот кажущийся. Инвариантным является интеграл 4-вектора по некоторой фиксированной поверхности. Такой интеграл преобразуется как 4-вектор. В нашем случае мы вычисляли интеграл 4-вектора по неподвижной сфере **S**. Если мы перейдем к системе отсчета движущегося наблюдателя и построим неподвижную сферу **S**$'$, то это окажется *другая* поверхность, поскольку при переходе к движущейся системе сфера **S** испытывает лоренцево сокращение и деформируется. А поток 4-тензора через *различные* поверхности не является 4-вектором.

Источником недопонимания может быть несколько механистическое представление о взаимодействии заряда и поля, согласно которому поле, действуя на заряд некоторой силой, совершает работу над зарядом, сообщая ему энергию и импульс. Заряд, в свою очередь, передает энергию и импульс полю, уносящему энергию на бесконечность. Если бы это было так, то уносимые полем энергия и импульс равнялись бы изменению энергии-импульса заряда, и образовывали бы инвариантный 4-вектор, что очевидно противоречит (2.25)–(2.26). Мы должны признать, что подобное рассуждение, выглядящее логичным в рамках механики, неприменимо в теории поля. Если последовательно стоять на позиции теории поля, то мы должны считать, что по крайней мере часть энергии распределена в окружающем частицу поле.

В литературе можно встретить утверждение, что частица, движущаяся с постоянным 4-ускорением, не излучает энергии, а излучение сосредоточено в начале и конце участка постоянного 4-ускорения. Нам придется отнести это утверждение к ошибочным. Причины здесь две. Во-первых, исходным для этой ошибки было представление, что сила реакции излучения зависит от второй производной 4-скорости частицы, которая исчезает в случае гиперболического движения. Однако ранее нами было показано, что движение излучающей частицы может быть описано уравнением второго порядка, и получено выражение для силы торможения, не включающее вторых производных скорости [12]. Таким образом, при гиперболическом движении частица и излучает, и испытывает действие соответствующей силы радиационного трения.

Вторая причина – геометрическая. Рассматривая выше рис. 1, мы показали, что поток энергии через сферу **S** создается участком AC мировой линии частицы, для всех точек которого верно неравенство (2.3), то есть 4-точками, отделенными от γ^i– 4-центра сферы **S** – пространственноподобными интервалами. Однако ясно, что всегда можно выбрать γ^i достаточно близко к мировой линии, так чтобы 4-точки начала и конца участка постоянного ускорения оказались в областях абсолютного прошлого и абсолютного будущего. При этом полученный нами строго положительный поток энергии через сферу **S** (см. (2.21)) не может быть объяснен влиянием концов, но, несомненно, выражает излучение, возникающее на участке гиперболического движения.

Автор благодарен проф. Б.М. Болотовскому за ряд ценных замечаний, а также проф. Л.А. Максимову за внимательное отношение к данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Born, Ann. d. Phys. **30**, 1 (1909).

[2] В. Л. Гинзбург, УФН **98**(3), 569 (1969).

[3] В. Л. Гинзбург, *Теоретическая физика и астрофизика* (М., Наука, 1987).

[4] E. Eriksen and O. Gron, Ann. Phys. **286**, 320, 343, 373 (2000); **297**, 243 (2002); **313**, 147 (2004).

[5] J. Bicák and P. Krtous, Phys. Rev. Lett. **88**, 211101 (2002); C. Almeida and A. Saa, Am. J. Phys. **74**(2), 154 (2006).

[6] Л. Э. Гуревич, *Электродинамика* (Л., изд-во ЛГУ , 1940).

[7] T. Fulton and F. Rohrlich, Ann. Phys. (N.Y.) **9**, 499 (1960).

[8] В. Л. Гинзбург, В. Н. Сазонов, С. И. Сыроватский. УФН **94**(1), 63 (1968).

[9] В. Л. Гинзбург, С. И. Сыроватский, Ann. Rev. Astron. and Astrophys. **7**, 375 (1969).

[10] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля* (М., Наука, 1973).

[11] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, 3rd ed (John Wiley and Sons, Inc, 1999).

[12] В. В. Лидский, Теоретическая и математическая физика **143**(1), 112 (2005).

Поступила в редакцию 9 сентября 2008 г.