УДК 538.80

ТЕНЗОР МИНКОВСКОГО ИЛИ ТЕНЗОР АБРАГАМА?

В. П. Макаров, А. А. Рухадзе

Доказывается, что вопрос, вынесенный в заглавие статьи, имеет однозначный ответ – тензор Абрагама.

1. Подход Гинзбурга–Угарова. В вековой дискуссии о тензоре энергии-импульса электромагнитного поля в веществе особое место занимает работа В. Л. Гинзбурга и В. А. Угарова [1]. Подход, предложенный в [1], состоит в следующем:

1. "Тензор энергии-импульса в макроскопической электродинамике является величиной в известном смысле вспомогательной. Основными же величинами являются объемные силы, а также плотность энергии и поток энергии. Именно силы входят в уравнения движения среды и могут, в принципе, быть измерены" [1, стр. 175].

2. "Желательно получить и силы и другие выражения (плотность энергии, поток энергии, плотность импульса) единым образом на базе уравнений поля" [1, стр. 176]. Из уравнений Максвелла

$$\mathrm{div}\vec{D}=0,\ \mathrm{rot}\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\ \mathrm{div}\vec{B}=0,\ \mathrm{rot}\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad (1.1)$$

получается уравнение, эквивалентное закону сохранения энергии (формула (12) в [1]),

$$\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+4\pi\mathrm{div}\vec{S}^{(P)}=0,\ \vec{S}^{(P)}=\frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H}, \quad (1.2)$$

и уравнение, эквивалентное закону сохранения импульса[1],

$$\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\times\vec{B})=\vec{\sigma}^{(H)\prime}-\vec{f}^{(1)}-\vec{f}^{(2)},\ \sigma_i^{(H)\prime}=\frac{\partial\sigma_{ij}^{(H)}}{\partial r_j}, \quad (1.3)$$

[1] По дважды повторяющимся индексам $i, j, \ldots = x, y, z$ везде подразумевается суммирование.

где[2]

$$\sigma_{ij}^{(H)} = \sigma_{ji}^{(H)} = \frac{1}{8\pi}\{[(E_iD_j + E_jD_i) - \vec{E}\cdot\vec{D}\delta_{ij}] + [(H_iB_j + H_jB_i) - \vec{H}\cdot\vec{B}\delta_{ij}]\}, \tag{1.4}$$

$$\vec{f}^{(1)} = -\frac{1}{8\pi}\mathrm{rot}(\vec{E}\times\vec{D} + \vec{H}\times\vec{B}), \tag{1.5}$$

$$f_i^{(2)} = -\frac{1}{8\pi}\left[\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial r_i} - \vec{D}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial r_i}\right) + \left(\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial r_i} - \vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial r_i}\right)\right]. \tag{1.6}$$

3. "При обсуждении закона сохранения энергии естественно обратиться к движущимся средам, поскольку сила, действующая на среду, "работает" только, если скорость среды не равна нулю" [1, стр. 176]. Следовательно, если даже конечной целью является нахождение силы, действующей на покоящееся вещество, необходимо, тем не менее, рассматривать движущуюся среду.

4. Если среда движется, то соответствующие материальные уравнения отличаются от простых уравнений $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ и $\vec{B} = \mu\vec{H}$, справедливых только для покоящейся среды[3]. С точностью до членов $\sim v/c$, где $\vec{v}$ – скорость вещества, связь между полями $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}$ и $\vec{B}$ в неподвижной, лабораторной, системе отсчета дается уравнениями Минковского (см. формулы (10)–(11), стр. 176 в [1] и [2, §33], [3, §76], [4, §111]):

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} + \frac{\epsilon\mu - 1}{c}(\vec{v}\times\vec{H}),$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} - \frac{\epsilon\mu - 1}{c}(\vec{v}\times\vec{E}). \tag{1.7}$$

Подход, предложенный в [1], основан только на уравнениях (1.2)–(1.3) и (1.7)[4]. Однако реализован этот подход в [1] при некоторых ограничениях на ϵ, μ и скорость $\vec{v}$. В [1, стр. 177] "предполагается, что изменение ϵ (а также μ) для данного элемента среды связано лишь с изменением ее плотности", т.е.

$$\epsilon = \epsilon(\rho),\ \mu = \mu(\rho), \tag{1.8}$$

---

[2]Равенство (1.3) мы записали в форме, несколько отличающейся от формулы (20а) в [1], используя симметричный тензор $\sigma_{ij}^{(H)}$, введенный Г. Герцем [2, §35].

[3]В [1] и в данной работе рассматриваются только изотропные, негиротропные среды при пренебрежении дисперсией диэлектрической и магнитной проницаемостей.

[4]Удивительно, что в обзоре [5], целиком посвященном проблеме силы, действующей на вещество в электромагнитном поле, и импульса поля, подход, предложенный в [1], никак не обсуждается (хотя ссылки на эту и другие работы В. Л. Гинзбурга по этой проблеме в [5] имеются). В обзоре [6] 2007 года дается почти столетняя история дискуссии по этой проблеме, начиная с первых работ Минковского и Абрагама, но ссылка на [1] вообще отсутствует.

и "скорость среды постоянна в пространстве и во времени или, точнее, производными по $\vec{r}$ и t везде можно пренебречь (будет сохранена лишь $\operatorname{div}\vec{v}$)", т.е.

$$\frac{\partial v_i}{\partial r_j} = \frac{1}{3}\operatorname{div}\vec{v}\delta_{ij}, \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0. \tag{1.10}$$

В [1] исследуются уравнения (1.2)–(1.3) и (1.7) при условиях (1.8)–(1.10). Согласно [1, стр. 178], "законы сохранения не могут однозначно определять входящие в них величины", и более конкретно – существуют две возможности: сила $\vec{f}$, с которой электромагнитное поле действует на единицу объема покоящегося вещества, и плотность импульса электромагнитного поля $\vec{g}$ определяются либо по формулам Абрагама

$$\vec{f} = \vec{f}^{(G)} + \vec{f}^{(A)},\ \vec{g} = \frac{1}{c^2}\vec{S}^{(P)} = \frac{1}{4\pi c}\vec{E}\times\vec{H}, \tag{1.11}$$

либо по формулам Минковского

$$\vec{f} = \vec{f}^{(G)},\ \vec{g} = \frac{1}{4\pi c}\vec{D}\times\vec{B}. \tag{1.12}$$

Здесь[5]

$$\vec{f}^{(G)} = \frac{1}{8\pi}\left[\nabla\rho\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho}E^2 + \frac{\partial\mu}{\partial\rho}H^2\right) - (E^2\,\nabla\,\epsilon + H^2\,\nabla\,\mu)\right], \tag{1.13}$$

$$\vec{f}^{(A)} = \frac{\epsilon\mu - 1}{c^2}\frac{\partial\vec{S}^{(P)}}{\partial t} = \frac{\epsilon\mu-1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{H}). \tag{1.14}$$

Выбор выражений для импульса поля и силы (из двух возможных вариантов (1.11) или (1.12)) "должен производиться на основании опытных данных или каких-то расчетов, лежащих за пределами самих уравнений для макроскопического поля" (см. [1, стр. 185]).

Мы считаем, что предложенный и использованный в [1] подход является единственно последовательным подходом в макроскопической электродинамике. Поэтому с невозможностью – в рамках этого подхода – однозначного ответа на вопрос о силе, действующей на вещество, можно было бы еще "согласиться", если бы сила не выражалась только через поля и диэлектрическую и магнитную проницаемости. Но в обоих возможных, согласно [1], вариантах сила и импульс поля выражаются только через поля и проницаемости ϵ и μ. Это обстоятельство и несомненная важность вопроса побудили

[5]Для электростатического поля сила (1.13) получена впервые Гельмгольцем (см. [3, §15]).

нас вернуться к его обсуждению в рамках подхода [1], т.е. исходя из уравнений (1.2)–(1.3) и (1.7). Мы повторяем проведенные в [1] вычисления во всех основных пунктах за одним исключением – мы не будем налагать на ϵ, μ и скорость среды $\vec{v}$ никаких ограничений (полагая лишь, что $v \ll c$) до тех пор, пока сам ход вычислений не заставит нас ввести ограничения (вида (1.8)–(1.10) или какие-либо другие), чтобы избежать внутренних противоречий в теории. Таким образом мы узнаем, насколько результаты [1] связаны с налагаемыми с самого начала условиями (1.8)–(1.10), и, если эти условия не необходимы для самого подхода [1], то как изменятся результаты, если от них (этих условий) отказаться.

Диэлектрическая и магнитная проницаемости являются функциями плотности и энтропии (или температуры)[6] в системе отсчета, где ϵ и μ определены, т.е. в системе отсчета, относительно которой вещество покоится. Но $\left(\text{с точностью до членов} \sim \frac{v}{c}\right)$ плотность, энтропия и температура не меняются при преобразованиях Лоренца (см. [2, §46]). Поэтому можем полагать, что

$$\epsilon = \epsilon(\rho, s), \; \mu = \mu(\rho, s), \tag{1.15}$$

где ρ и s – плотность и энтропия – функции координат $\vec{r}$ и времени t в лабораторной системе отсчета.

Материальные уравнения Минковского (1.7) являются прямым следствием преобразований Лоренца и поэтому справедливы, строго говоря, только в том случае, если сопутствующая система отсчета (в которой вещество покоится) – инерциальная, т.е. вещество как целое движется относительно (тоже инерциальной) лабораторной системы отсчета с постоянной скоростью $\vec{v}(\vec{r}, t) = \text{const}$. Если же скорость $\vec{v} \neq \text{const}$, сопутствующая система отсчета – не инерциальная и сами уравнения Максвелла, определение полей через силу, действующую на точечный (пробный) заряд, и материальные уравнения, вообще говоря, существенно отличаются от соответствующих уравнений в инерциальной системе отсчета[7]. Однако, следуя [1], [2, §76], мы будем полагать, что материальные уравнения Минковского (1.7) остаются справедливыми и тогда, когда

[6] Для простоты мы полагаем, что среда однородна по своему составу; для неоднородной среды ϵ и μ – функции еще и концентрации смеси веществ.

[7] Относительно микроскопических уравнений Максвелла см. [7, §90].

скорость $\vec{v}$ – не постоянная, но достаточно медленно изменяющаяся функция[8]. (Возможно, стоит еще раз напомнить, что нашей конечной целью (как и в работе [1]) является получение выражений для силы и импульса поля в неподвижной среде.)

2. Закон сохранения энергии. Рассмотрим сначала уравнение (1.2) (уравнение (12) в [1]). Прежде всего, строго определим, что мы понимаем под силой $\vec{f}$, действующей на единицу объема вещества со стороны электромагнитного поля. Это можно сделать, только записав уравнение движения вещества при наличии поля. Так как в окончательном ответе свойства вещества проявляются только через диэлектрическую и магнитную проницаемости, можно выбрать самую простую среду – идеальную жидкость. Для нее уравнение движения – уравнение Эйлера (см. [8, §2]) с добавлением в него силы $\vec{f}$:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \frac{1}{\rho}(-\nabla p + \vec{f}), \tag{2.1}$$

где $p = p(\rho, s)$ – это давление, которое было бы в веществе в отсутствие поля при данных (уже в присутствии поля) значениях плотности ρ и энтропии s (см. [3, §15]). После такого уточнения смысла давления p уравнением (2.1) вполне определяется и сила $\vec{f}$.

Найдем, как изменяется во времени энергия единицы объема вещества

$$w^{(m)} = \rho\left(\frac{v^2}{2} + \epsilon^{(m)}\right), \tag{2.2}$$

где $\epsilon^{(m)} = \epsilon^{(m)}(\rho, s)$ – внутренняя энергия единицы массы вещества в отсутствие поля. Повторив вычисления, проведенные в [8, §6], с учетом уравнения (2.1), получим:

$$\frac{\partial w^{(m)}}{\partial t} = -\mathrm{div}\vec{S}^{(m)} + \vec{f}\cdot\vec{v}, \tag{2.3}$$

где плотность потока энергии вещества

$$\vec{S}^{(m)} = \rho\vec{v}\left(\frac{v^2}{2} + \epsilon^{(m)} + \frac{p}{\rho}\right). \tag{2.4}$$

Закону сохранения полной энергии системы (вещества и поля) соответствует уравнение

$$\frac{\partial w^{(\mathrm{tot})}}{\partial t} = -\mathrm{div}\vec{S}^{(\mathrm{tot})},\ w^{(\mathrm{tot})} = w^{(m)} + w,\ \vec{S}^{(\mathrm{tot})} = \vec{S}^{(m)} + \vec{S}, \tag{2.5}$$

---

[8]Заметим, что в [2, §76] уравнения Минковского применяются при решении задач об электрическом поле, возникающем вокруг равномерно вращающегося шара.

где, по определению, w – плотность энергии, $\vec{S}$ – плотность потока энергии электромагнитного поля. Из (2.5) и (2.3) получаем уравнение

$$\vec{f}\cdot\vec{v} = -\frac{\partial w}{\partial t} - \mathrm{div}\vec{S}. \tag{2.6}$$

Таким образом, если сила $\vec{f}$, с которой поле действует на вещество, определяется в соответствии с уравнением движения (2.1), то уравнение (1.2) должно приводиться к виду (2.6). Подставим в (1.2) $\vec{D}$ и $\vec{B}$ из (1.7). После простых вычислений, при использовании равенства

$$\frac{\partial\epsilon}{\partial t} = \frac{\partial\epsilon}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\epsilon}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t} = -\left(\rho\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho}\mathrm{div}\vec{v} + \vec{v}\cdot\nabla\epsilon\right) \tag{2.7}$$

и аналогичного равенства для μ, уравнение (1.2) приводится к следующему виду:

$$(\vec{f}^{(G)} + \vec{f}^{(A)})\cdot\vec{v} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{8\pi}(\epsilon E^2 + \mu H^2) - \frac{2}{c^2}(\epsilon\mu - 1)\vec{v}\cdot\vec{S}^{(P)}\right] -$$
$$-\mathrm{div}\left[\vec{S}^{(P)} - \frac{1}{8\pi}\rho\vec{v}\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho}E^2 + \frac{\partial\mu}{\partial\rho}H^2\right)\right], \tag{2.8}$$

сила Гельмгольца $\vec{f}^{(G)}$ и сила Абрагама $\vec{f}^{(A)}$ определяются по формулам (1.13) и (1.14). Уравнение (2.8) имеет требуемый согласно (2.6) вид, при этом сила, действующая со стороны электромагнитного поля на единицу объема вещества,

$$\vec{f} = \vec{f}^{(G)} + \vec{f}^{(A)} + \vec{f}^{(\perp)}, \tag{2.9}$$

где $\vec{f}^{(\perp)}$ – неизвестная пока сила, перпендикулярная скорости $\vec{v}$ и поэтому не дающая вклада в работу $\vec{f}\cdot\vec{v}$;

$$w = \frac{1}{8\pi}(\epsilon E^2 + \mu H^2) - \frac{2}{c^2}(\epsilon\mu - 1)\vec{v}\cdot\vec{S}^{(P)} \tag{2.10}$$

– плотность энергии поля (формула (19) в [1]);

$$\vec{S} = \vec{S}^{(P)} - \frac{1}{8\pi}\rho\vec{v}\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho}E^2 + \frac{\partial\mu}{\partial\rho}H^2\right) \tag{2.11}$$

– плотность потока энергии поля (формула (17) в [1]).

3. Законы сохранения импульса и момента импульса. Рассмотрим уравнение (1.3) (уравнение (20а) в [1]). Найдем, как изменяется во времени импульс единицы объема вещества

$$\vec{P}^{(m)} = \rho\vec{v}. \tag{3.1}$$

Повторив вычисления, проведенные в [8, §7], используя при этом уравнение (2.1), получим:

$$\frac{\partial P_i^{(m)}}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_{ij}^{(m)}}{\partial r_j} + f_i, \tag{3.2}$$

где плотность потока импульса вещества

$$\Pi_{ij}^{(m)} = \Pi_{ji}^{(m)} = \rho v_i v_j - \sigma_{ij}^{(m)}; \tag{3.3}$$

$$\sigma_{ij}^{(m)} = \sigma_{ji}^{(m)} = -p\delta_{ij} \tag{3.4}$$

– тензор напряжений в отсутствие поля.

Закону сохранения полного импульса $\vec{P}^{(\text{tot})}$ системы, состоящей из вещества и поля, соответствует уравнение

$$\frac{\partial P_i^{(\text{tot})}}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_{ij}^{(\text{tot})}}{\partial r_j}, \ \vec{P}^{(\text{tot})} = \vec{P}^{(m)} + \vec{g}, \ \Pi_{ij}^{(\text{tot})} = \rho v_i v_j - \sigma_{ij}^{(\text{tot})}, \ \sigma_{ij}^{(\text{tot})} = \sigma_{ij}^{(m)} + \sigma_{ij}, \tag{3.5}$$

где, по определению, $\vec{g}$ – плотность импульса поля, а σ_{ij} – тензор напряжений, связанный с полем. Из (3.5) и (3.2) получаем:

$$\vec{f} = -\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + \vec{\sigma}', \ \sigma_i' = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r_j}. \tag{3.6}$$

Важно иметь в виду, что полный тензор напряжений должен быть непременно симметричным (см. [3, §15]): $\sigma_{ij}^{(\text{tot})} = \sigma_{ji}^{(\text{tot})}$. Отсюда, при учете формул (3.5) и (3.4), следует, что и

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \tag{3.7}$$

Уравнение (1.3) должно приводиться к виду (3.6) с симметричным тензором σ_{ij} (см. (3.7)) и с силой $\vec{f}$ (2.8). Используя уравнения (1.7), получим:

$$\vec{f}^{(1)} = -\frac{1}{2c^2}\text{rot}(\epsilon\mu - 1)\vec{v} \times \vec{S}^{(P)} = -\vec{\sigma}^{(1)\prime} + \frac{\epsilon\mu - 1}{c^2}(\vec{v}\cdot\bigtriangledown)\vec{S}^{(P)} + \frac{1}{c^2}\vec{S}^{(P)}\text{div}(\epsilon\mu - 1)\vec{v}. \tag{3.8}$$

Здесь

$$\sigma_i^{(1)\prime} = \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial r_j}, \ \sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ji}^{(1)} = \frac{\epsilon\mu - 1}{2c^2}(v_i S_j^{(P)} + v_j S_i^{(P)}); \tag{3.9}$$

$$f_i^{(2)} = f_i^{(G)} - \sigma_i^{(2)\prime} - \frac{\epsilon\mu - 1}{c^2}\vec{v} \times \frac{\partial \vec{S}^{(P)}}{\partial r_i}, \tag{3.10}$$

где

$$\sigma_i^{(2)\prime} = \frac{\partial \sigma_{ij}^{(2)}}{\partial r_j}, \ \sigma_{ij}^{(2)} = \delta_{ij}\left[\frac{1}{8\pi}\rho\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho}E^2 + \frac{\partial\mu}{\partial\rho}H^2\right) - \frac{1}{c^2}(\epsilon\mu - 1)\vec{v}\cdot\vec{S}^{(P)}\right]. \tag{3.11}$$

Подставляя $\vec{f}^{(1)}$ из (3.8) и $\vec{f}^{(2)}$ из (3.10) в уравнение (1.3), приводим его к виду[9]:

$$\vec{f}^{(G)} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \epsilon\mu}{\partial t}\vec{S}^{(P)} + \vec{f}^{(v)} = -\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\times\vec{B}) + \vec{\sigma}', \tag{3.12}$$

где

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \sigma_{ij}^{(H)} + \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} \tag{3.13}$$

и сила, зависящая от скорости,

$$\vec{f}^{(v)} = -\frac{1}{c^2}\left[(\epsilon\mu - 1)\vec{v}\times \mathrm{rot}\vec{S}^{(P)} + \vec{S}^{(P)}\left(1 + \rho\frac{\partial\epsilon\mu}{\partial\rho} - \epsilon\mu\right)\mathrm{div}\vec{v}\right]. \tag{3.14}$$

Уравнение (3.12) имеет требуемый согласно (3.6) вид, но левая часть уравнения отличается от силы $\vec{f}$, для которой ранее мы получили выражение (2.9), содержащее силу Абрагама $\vec{f}^{(A)}$. Следовательно, для дальнейших вычислений существуют две возможности [1]: либо, оставив без изменения уравнение (2.8), преобразовать уравнение (3.12) так, чтобы в его левой части появилась сила Абрагама $\vec{f}^{(A)}$; либо, оставив без изменения уравнение (3.12), преобразовать уравнение (2.8) так, чтобы исключить из его левой части силу Абрагама $\vec{f}^{(A)}$. Сначала мы воспользуемся первой возможностью.

Прибавим к обеим частям уравнения (3.12) силу Абрагама (1.14). В результате получим уравнение

$$\vec{f}^{(G)} + \vec{f}^{(A)} + \vec{f}^{(v)} = -\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\vec{D}\times\vec{B} - (\epsilon\mu - 1)\vec{E}\times\vec{H}] + \vec{\sigma}'. \tag{3.15}$$

Сравнивая (3.15) и (3.6), находим, что плотность импульса электромагнитного поля

$$\vec{g} = \frac{1}{4\pi c}[\vec{D}\times\vec{B} - (\epsilon\mu - 1)\vec{E}\times\vec{H}], \tag{3.16}$$

а симметрический тензор напряжений σ_{ij} определяется по формуле (3.13). Левая часть уравнения (3.15) определяет силу $\vec{f}^{(\perp)}$ (см. (2.9)), которая перпендикулярна скорости и не определяется из закона сохранения энергии; она выражается через силу $\vec{f}^{(v)}$ (3.14):

$$\vec{f}^{(\perp)} = \vec{f}^{(v)} - \vec{v}\frac{(\vec{v}\cdot\vec{f}^{(v)})}{v^2}. \tag{3.17}$$

Но левая часть уравнения (3.15) содержит и лишнее по сравнению с силой (2.9) слагаемое

$$\vec{f}^{(\|)} = v\frac{(\vec{v}\cdot\vec{f}^{(v)})}{v^2}, \tag{3.18}$$

[9] Соответствующее уравнение (24) в [1] записано уже для неподвижной среды.

которое должно быть пренебрежимо малым по сравнению с $\vec{f}^{(G)}$ и $\vec{f}^{(A)}$:

$$|\vec{f}^{(\parallel)}| \ll |\vec{f}^{(G)}|, |\vec{f}^{(A)}|. \tag{3.19}$$

Условие (3.19) – это единственное условие, при котором с точностью $\sim v/c$ все величины: плотность энергии поля (2.9), плотность потока энергии поля (2.10), плотность импульса поля $\vec{g}$ (3.16), плотность силы, действующей на вещество в поле, $\vec{f}$ (2.9) и симметричный тензор напряжений σ_{ij} (3.13) определяются в макроскопической теории непротиворечивым образом. Остается лишь показать, что эти определения однозначны. Что касается условия (3.19), то (кроме очевидного случая, когда $\vec{v} \perp \vec{S}^{(P)}$) $\vec{f}^{(\parallel)} = 0$, когда среду можно считать несжимаемой $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$ [3, §76] и когда среда – достаточно разреженный газ (тогда $\mu = 1$, $\rho\partial\epsilon/\partial\rho = \epsilon - 1$ [3, §15]).

Теперь воспользуемся второй возможностью: оставляем без изменения уравнение (3.12), а преобразуем уравнение (2.8), вычитая из обеих его частей работу $\vec{v}\cdot\vec{f}^{(A)}$ силы Абрагама (1.14). В результате вместо уравнения (2.8) получим следующее уравнение:

$$\left(\vec{f}^{(G)} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\epsilon\mu}{\partial t}\vec{S}^{(P)}\right)\cdot\vec{v} - \frac{\epsilon\mu - 1}{c^2}\vec{S}^{(P)}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\frac{\partial(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B})}{8\pi\partial t} - \mathrm{div}\vec{S}, \tag{3.20}$$

которое имеет требуемый, согласно (2.6), вид, если только слагаемым, содержащим $\partial\vec{v}/\partial t$ в нем, можно пренебречь, т.е. если

$$\left|\frac{\epsilon\mu - 1}{c^2}\vec{S}^{(P)}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right| \ll |\vec{f}^{(G)}\cdot\vec{v}|. \tag{3.21}$$

За исключением очевидного случая, когда $\vec{S}^{(P)} \perp \partial\vec{v}/\partial t$, условие (3.21) эквивалентно условию (1.10). Если вместе с условием (3.19) выполняется еще и условие (3.21), то можно принять в качестве плотности энергии поля, плотности импульса поля и силы следующие выражения:

$$\frac{1}{8\pi}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B}),\ \frac{1}{4\pi c}\vec{D}\times\vec{B},\ \vec{f}^{(G)} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\epsilon\mu}{\partial t}\vec{S}^{(P)} \tag{3.22}$$

наряду с (2.9), (3.16) и (2.8) соответственно.

Если же отказаться от ограничения только стационарным движением среды (от условия (1.10) или (3.21)), то при одном только условии (3.19) все величины определяются непротиворечивым и однозначным образом. Для неподвижной среды плотность энергии, плотность потока энергии, плотность импульса, плотность силы и тензор напряжений определяются по формулам:

$$w = \frac{1}{8\pi}(\epsilon E^2 + \mu H^2),\ \vec{S} = \vec{S}^{(P)},\ \vec{g} = \frac{1}{c^2}\vec{S}^{(P)},\ \vec{f} = \vec{f}^{(G)} + \vec{f}^{(A)},$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \frac{1}{4\pi}\left[\epsilon E_i E_j - \frac{1}{2}\left(\epsilon - \rho\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho}\right)E^2\delta_{ij}\right] + \\ + \frac{1}{4\pi}\left[\mu H_i H_j - \frac{1}{2}\left(\mu - \rho\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)H^2\delta_{ij}\right]. \quad (3.23)$$

Соответственно 4-тензор энергии-импульса электромагнитного поля в неподвижной среде $T_{\lambda v}(\lambda, v = i, 4,\ i = 1, 2, 3$ или $x, y, z,\ r_4 = ict)$ – симметрический тензор Абрагама (см. формулы (32) в [1]):

$$T_{ij} = \sigma_{ij},\ T_{4j} = T_{j4} = -\frac{i}{c}S_j^{(P)} = -\frac{i}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{H}),\ T_{44} = w. \quad (3.24)$$

4. Заключение. Согласно [1], сила, действующая на вещество в электромагнитном поле и другие величины, квадратичные по полю (энергия, поток энергии, импульс поля), должны получаться единым образом на основе уравнений Максвелла, соответствующих материальных уравнений и уравнений движения среды. Этот подход в [1] был реализован для изотропной центросимметричной (негиротропной) среды при пренебрежении дисперсией диэлектрической ϵ и магнитной μ проницаемостей и при некоторых еще дополнительных ограничениях на ϵ, μ и скорость среды $\vec{v}(\vec{r}, t)$ (см. (1.8)–(1.10)). Авторы [1] показали, что в рамках предложенного ими подхода (по нашему мнению – единственно последовательного подхода в макроскопической электродинамике), когда выполняются условия (1.8)–(1.10), не представляется возможным однозначно определить силу, действующую на вещество, и импульс поля: в пределе, когда движением вещества можно пренебречь, для силы и импульса поля получаются либо формулы Абрагама (1.11), либо формулы Минковского (1.12).

Представляется интересным выяснить, в какой степени условия (1.8)–(1.10) являются необходимыми для самого подхода [1] и, если они не необходимы и от них можно отказаться, то насколько результат о неоднозначности определения силы и импульса поля связан с этими условиями. В данной работе показано, что ни одно из условий (1.8)–(1.10) не является необходимым. Единственное условие, выполнение которого необходимо для отсутствия внутреннего противоречия в подходе [1], – это условие (3.19) на div $\vec{v}$ (см. (3.18)), не сводящееся к условиям (1.8)–(1.10).

Условия (1.8) и (1.9) – не принципиальны, т.е. отказ от них не изменяет результата [1] о невозможности однозначного определения силы и импульса поля. Условие же (1.10) в этом смысле – принципиально: если условие (1.10) принять, т.е. ограничиться только стационарным движением вещества, то выбор из двух возможных выражений для импульса поля и, соответственно, для силы – (1.11) или (1.12) действительно невозможен, в согласии с [1]. Если же от условия (1.10) отказаться, то вторая возможность – (1.12) исключается, так как она приводит к внутренним противоречиям в самом подходе [1].

Таким образом, если, оставаясь в рамках макроскопической теории, мы хотим найти силу, действующую в электромагнитном поле на покоящееся вещество, мы должны, тем не менее, рассматривать движущуюся среду [1], причем, как мы показали, – движущуюся не стационарно. При этом для импульса поля и силы получаются формулы (1.11), совпадающие с соответствующими формулами, приведенными в [3, §75] и [4, §105]. Что касается 4-тензора энергии-импульса электромагнитного поля в неподвижной среде, то для него справедлива симметричная форма Абрагама (см. (3.24), формулы (32) и (33) в [1] и [2, §35]).

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Л. Гинзбург, В. А. Угаров, УФН **118**, 175 (1976).

[2] В. Паули, *Теория относительности* (М., Наука, 1983).

[3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред* (М., Наука, 1982).

[4] И. Е. Тамм, *Основы теории электричества* (М., Наука, 1989).

[5] I. Brevik, Phys. Rept. **52**, 133 (1979).

[6] R. N. C. Pfeifer, T. A. Nieminen, N. R. Heckenberg, and H. Rubinsztein–Dunlop, Rev. Mod. Phys. **79**, 1197 (2007).

[7] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля* (М., Наука, 1973).

[8] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика* (М., Наука, 1988).

Поступила в редакцию 20 января 2009 г.