

УДК 535.14

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И НЕРАВЕНСТВО БЕЛЛА ДЛЯ СОСТОЯНИЯ КВАНТОВОГО КУБИТА

М. А. Анисимов¹, А. А. Колесников¹, В. И. Манько

Исследуется проблема нарушения неравенства Белла для частицы со спином $1/2$ в рамках томографического подхода. Представлены два возможных способа построения функций распределения, ассоциированных с квантовым состоянием кубита, и исследовано значение максимума параметра Белла для каждого из предложенных распределений.

1. *Введение.* Запутанность квантовых состояний [1] связана с характерными квантовыми корреляциями между частями квантовой системы. Тем самым предполагается, что система является сложной, т.е. состоит из двух и более подсистем и в ней могут появляться сильные квантовые корреляции. Существует формулировка квантовой механики, в которой квантовые состояния описываются стандартными распределениями вероятности, содержащими ту же информацию о состоянии системы, которая содержится в волновой функции (для чистых состояний) или в матрице плотности (для смешанных состояний). Функция распределения вероятностей по стандартным формулам теории вероятности позволяет вычислить все моменты, включая корреляции случайных величин. Поэтому в случае сложных систем процедура вычисления параметра Белла, определяющего известное неравенство Белла [2], сформулированное для квантовых корреляций, вычисляемых по формулам с использованием матрицы плотности и радикально отличающихся от формул стандартной теории вероятности, сводится в рамках вероятностного представления квантовой механики, включая вероятностное представление для спиновых систем, к процедуре вычисления корреляций с помощью

¹Московский физико-технический институт (государственный университет), Институтский пер. 9, Долгопрудный, Московская обл., 141700 Россия.

обычных распределений, задающих квантовое состояние. Таким образом, оказалось возможным связать проблему нарушения неравенства Белла с проблемой классификации свойств совместных функций распределения вероятностей, возникающих в любых задачах, как, например, в задаче двух кубитов [3].

В последнее время внимание исследователей было привлечено проблемой, аналогичной с точки зрения математического формализма “запутанности” квантового состояния, рассматриваемого для отдельной частицы [4, 5]. Дело в том, что можно связать с состоянием отдельной квантовой системы, не содержащей подсистем, совместные функции распределения вероятностей, причем сделать это разными способами. Возникающие при этом совместные распределения вероятностей напоминают распределения, характерные для томографических распределений вероятности задачи о двух кубитах. В этой связи представляется интересным построить и изучить такие томографические распределения вероятностей, ассоциированные с состоянием одной частицы, и сравнить их свойства со свойствами томографических распределений состояний составных частиц (двух кубитов), в которых проявляется явление запутанности. Целью настоящей работы является исследование нарушения или выполнения неравенства, аналогичного стандартному неравенству Белла, исходя из совместных функций распределения вероятностей, построенных для состояния отдельного кубита. Распределение вероятностей в работе рассматривается на основе так называемого томографического подхода, в котором квантовое состояние описывается томографическим распределением вероятностей или томограммой.

2. Спиновая томограмма. Томографическое описание применимо к системам как с непрерывными степенями свободы (координата), так и с дискретными (спин). В данной работе исследуется случай спиновой системы на примере кубита, реализуемого, в частности, частицей со спином $1/2$ в магнитном поле. Поэтому в этом случае для описания состояния кубита используется спиновая томограмма [3], см. также [6].

Для системы с заданным угловым моментом j матричный элемент оператора плотности ρ в повернутом базисе $\{|m\rangle, m = -j..j\}$ представим в виде:

$$\rho = \int d\vec{n} \sum_{m=-j}^j \omega(m, \vec{n}) K(m, \vec{n}), \quad (1)$$

где \vec{n} – единичный вектор, определяемый углами Эйлера α, β (третий угол $\gamma = 0$), задает точку на сфере Блоха; $K(m, \vec{n})$ – оператор с матричными элементами

$$\langle m' | K(m, \vec{n}) | m'' \rangle = \frac{(-1)^{m+m''}}{8\pi^2} \sum_{k=0}^{2j} (2k+1)^2 \times$$

$$\times \sum_{l=-j}^j \langle l | D(\vec{n}) | 0 \rangle W_{m', -m'', l}^{i, j, k} W_{m, -m, l}^{i, j, k}, \quad (2)$$

зависящими от оператора поворота

$$D(\vec{n}) \equiv \exp[-i(\alpha j_x + \beta j_y + \gamma j_z)], \quad (3)$$

а выражение

$$W_{m_1, m_2, m_3}^{j_1, j_2, j_3} = (-1)^{j_1 - j_2 - m_3} \sqrt{\frac{(j_1 + j_2 - j_3)! (j_1 - j_2 + j_3)! (-j_1 + j_2 + j_3)!}{(j_1 + j_2 + j_3 + 1)!}} \times \\ \times \sum_t \frac{(-1)^t \sqrt{(j_1 + m_1)! (j_1 - m_1)! (j_2 + m_2)! (j_2 - m_2)! (j_3 + m_3)! (j_3 - m_3)!}}{t! (j_3 - j_2 + t + m_1)! (j_3 - j_1 + t - m_2)! (j_1 + j_2 - j_3 - t)! (j_1 - t - m_1)! (j_2 - t + m_2)!} \quad (4)$$

задает $3j$ – символы Вигнера [7], причем суммирование производится по всем целым числам t . Наконец, $\omega(m, \vec{n})$ представляет собой томограмму, описывающую вероятность измерения определенного значения m проекции спина вдоль направления вектора \vec{n}

$$\omega(m, \vec{n}) = \langle m | D^{(j)}(\vec{n}) \hat{\rho} D^{\dagger(j)}(\vec{n}) | m \rangle. \quad (5)$$

Для любого вектора \vec{n} томограмма удовлетворяет условию нормировки

$$\sum_{m=-j}^j \omega(m, \vec{n}) = 1. \quad (6)$$

Томограмма (5) может рассматриваться как набор вероятностей определить проекцию спина в различных системах отсчета, полученных из исходной операциями поворота.

Состоянию кубита соответствует значение углового момента $j = 1/2$. Оператор проекции спина в случае кубита определяется матрицами Паули $j_x = \sigma_x/2$, $j_y = \sigma_y/2$, $j_z = \sigma_z/2$.

3. Нелокальность кубита. Известно, что проще интуитивно интерпретировать значение физической величины в классической механике, чем в квантовой. Преимущество томографического подхода состоит в том, что при его использовании несколько облегчается обсуждение проблемы физических наблюдаемых [8]. В частности, проблема коллапса волновой функции при измерениях сводится к классической проблеме редукции распределения вероятности (измерение распределения в одной повернутой системе отсчета влияет на распределения в других системах). Таким образом, нелокальный характер квантовой механики (т.е. зависимость от параметров системы отсчета) оказывается

присущим отдельной системе (имеет место возникновение корреляций между распределениями вероятности в различных системах отсчета). При рассмотрении неравенств Белла этот аспект обсуждается в рамках теории скрытых параметров [9].

4. *Вероятность измерения проекций спина на разные направления.* Рассмотрим измерение проекции спина вдоль двух направлений, определяемых векторами $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}$. В [5] показано, что в этом случае проектор, связанный с измерением физических величин в схеме с использованием положительной операторнозначной меры, задается выражением

$$\Pi_{r,s}(\vec{a}, \vec{b}) = \left(\frac{1}{4} + rs\vec{a} \cdot \vec{b} \right) I + (r\vec{a} + s\vec{b}) \cdot \vec{\sigma}/2, \quad (7)$$

где $r = s = \pm 1/2$ – возможные результаты измерения; $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ – вектор, элементами которого являются матрицы Паули; I – единичная блочная матрица.

Из-за особенностей измерения на векторы \vec{a} и \vec{b} налагается ограничение [4]:

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| + \|\vec{a} - \vec{b}\| \leq 2. \quad (8)$$

Для состояния кубита с матрицей плотности ρ вероятность измерения значений $r = \pm 1/2$, $s = \pm 1/2$ вдоль направлений векторов \vec{a}, \vec{b} определяется выражением:

$$P_{r,s}(\vec{a}, \vec{b}) = \text{Tr}[\rho \Pi_{r,s}(\vec{a}, \vec{b})]. \quad (9)$$

Тогда, написав функцию корреляции для проекций спина

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{r,s=\pm 1/2} 4rs \cdot P_{r,s}(\vec{a}, \vec{b}), \quad (10)$$

можно протестировать нелокальный характер кубита, используя неравенство Белла [2, 10] в форме CHSH (Clauser-Horne-Shimony-Holt) [11]. Для четырех произвольно направленных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}', \vec{b}'$ параметр Белла B определяется выражением, удовлетворяющим следующему неравенству:

$$B = |E(\vec{a}, \vec{b}) + E(\vec{a}, \vec{b}') + E(\vec{a}', \vec{b}) - E(\vec{a}', \vec{b}')| \leq 2. \quad (11)$$

Рассмотрим вектор состояния кубита $|\psi\rangle$, определяемый выражением

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\vartheta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\vartheta}{2} |1\rangle, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi. \quad (12)$$

В работе состояние $m = -1/2$ обозначено $|0\rangle$, а состояние $m = 1/2$ обозначено $|1\rangle$.

Выделив направление, параллельное x-z плоскости, рассмотрим векторы

$$\vec{a} \propto (0, 0, 1), \quad (13)$$

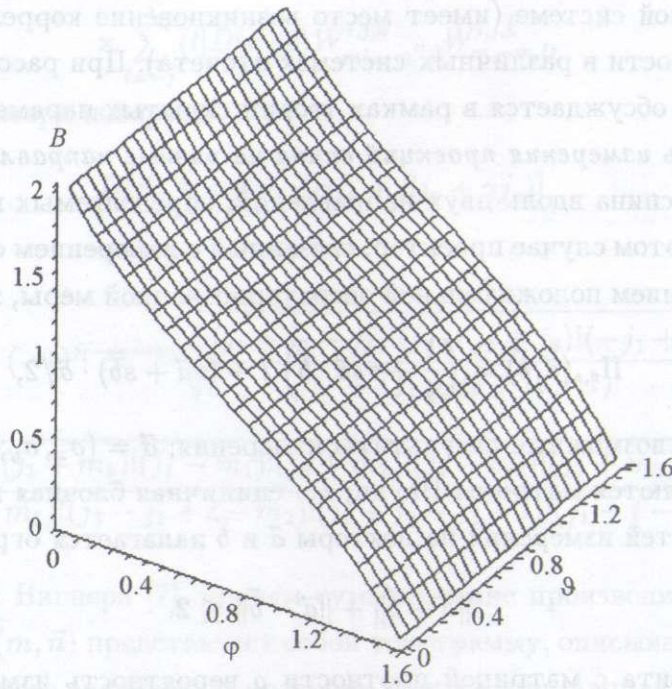


Рис. 1. Параметр Белла $B(\varphi, \vartheta)$.

$$\vec{a}' = \vec{b} \propto (\sin \varphi, 0, \cos \varphi), \tag{14}$$

$$\vec{b}' \propto (\sin 2\varphi, 0, \cos 2\varphi) \tag{15}$$

при $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Для вычисления параметра Белла (11) состояния (12) необходимо определить четыре возможных функции корреляции (10). В каждом случае мы предполагаем выполнение неравенства (8) и одинаковую норму векторов (13)–(15):

- 1) $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin \varphi}}(0, 0, 1), \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin \varphi}}(\sin \varphi, 0, \cos \varphi) \Rightarrow E(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi},$
- 2) $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin 2\varphi}}(0, 0, 1), \vec{b}' = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin 2\varphi}}(\sin 2\varphi, 0, \cos 2\varphi) \Rightarrow E(\vec{a}, \vec{b}') = \frac{\cos 2\varphi}{1 + \sin 2\varphi},$
- 3) $\vec{a}' = (\sin \varphi, 0, \cos \varphi), \vec{b} = (\sin \varphi, 0, \cos \varphi) \Rightarrow E(\vec{a}', \vec{b}) = 1,$
- 4) $\vec{a}' = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin \varphi}}(\sin \varphi, 0, \cos \varphi), \vec{b}' = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin \varphi}}(\sin 2\varphi, 0, \cos 2\varphi) \Rightarrow E(\vec{a}', \vec{b}') = \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi}.$

Подставляя вместе уравнения (1)–(4) в (11), легко видеть, что неравенство Белла всегда выполняется для состояния (12). На рис. 1 представлен параметр Белла как функция от углов φ и ϑ . Максимальное значение параметра Белла $B_{\max} = 2$ при нулевых углах.

5. Распределение, построенное из матричных элементов матрицы плотности. Существует еще один метод построения функции распределения вероятностей, не использующий томограмму. Рассмотрим его для того же кубита. С этой целью выпишем матрицу плотности в общем случае

$$\rho = \begin{pmatrix} x & z - it \\ z + it & y \end{pmatrix}. \quad (16)$$

При этом матричные элементы удовлетворяют условию положительности главных миноров

$$0 \leq x, y \leq 1, \quad xy - (z - it)(z + it) \geq 0, \quad (17)$$

а также условию нормировки

$$x + y = 1. \quad (18)$$

Выполнив преобразования поворота, получим матрицу плотности в повернутом базисе

$$\rho(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} A_{11}(\alpha, \beta, \gamma) & A_{12}(\alpha, \beta, \gamma) \\ A_{21}(\alpha, \beta, \gamma) & A_{22}(\alpha, \beta, \gamma) \end{pmatrix} \quad (19)$$

с матричными элементами, зависящими от углов Эйлера α, β, γ :

$$A_{11}(\alpha, \beta, \gamma) = x \cos^2 \frac{\beta}{2} + y \sin^2 \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} e^{i\gamma} (z - it) - \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} e^{-i\gamma} (z + it),$$

$$A_{12}(\alpha, \beta, \gamma) = x \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} e^{-i\alpha} - (z - it) e^{i(\gamma - \alpha)} \sin^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} e^{-i(\gamma + \alpha)} (z + it) - y \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} e^{i\alpha},$$

$$A_{21}(\alpha, \beta, \gamma) = x \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} e^{i\alpha} + \cos^2 \frac{\beta}{2} e^{i(\alpha + \gamma)} (z - it) - \sin^2 \frac{\beta}{2} e^{-i(\gamma - \alpha)} (z + it) - y \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} e^{-i\alpha},$$

$$A_{22}(\alpha, \beta, \gamma) = x \sin^2 \frac{\beta}{2} + y \cos^2 \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} e^{i\gamma} (z - it) + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} e^{-i\gamma} (z + it).$$

В этом случае сформулируем неравенство Белла (11) на языке распределений вероятности. Для этого рассмотрим стохастическую матрицу

$$M(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}', \vec{b}') = \begin{pmatrix} R_{11}(\vec{a}, \vec{b}) & R_{11}(\vec{a}, \vec{b}') & R_{11}(\vec{a}', \vec{b}) & R_{11}(\vec{a}', \vec{b}') \\ R_{12}(\vec{a}, \vec{b}) & R_{12}(\vec{a}, \vec{b}') & R_{12}(\vec{a}', \vec{b}) & R_{12}(\vec{a}', \vec{b}') \\ R_{21}(\vec{a}, \vec{b}) & R_{21}(\vec{a}, \vec{b}') & R_{21}(\vec{a}', \vec{b}) & R_{21}(\vec{a}', \vec{b}') \\ R_{22}(\vec{a}, \vec{b}) & R_{22}(\vec{a}, \vec{b}') & R_{22}(\vec{a}', \vec{b}) & R_{22}(\vec{a}', \vec{b}') \end{pmatrix}, \quad (20)$$

элементами которой являются распределения вероятностей R_{jk}

$$R_{jk} = \frac{|A_{jk}|^2}{|A_{11}|^2 + |A_{12}|^2 + |A_{21}|^2 + |A_{22}|^2}, \quad (21)$$

зависящие от элементов $\{A_{jk}\}_{j,k=1,2}$ и углов Эйлера. Очевидно, что распределения R_{jk} – положительны и нормированы. Функции корреляций (10) в этом случае совпадают с моментами стохастической матрицы $M(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}', \vec{b}')$, см., например, [3]:

$$E_1(\vec{a}, \vec{b}) = R_{11}(\vec{a}, \vec{b}) - R_{12}(\vec{a}, \vec{b}) - R_{21}(\vec{a}, \vec{b}) + R_{22}(\vec{a}, \vec{b}), \quad (22)$$

$$E_2(\vec{a}, \vec{b}') = R_{11}(\vec{a}, \vec{b}') - R_{12}(\vec{a}, \vec{b}') - R_{21}(\vec{a}, \vec{b}') + R_{22}(\vec{a}, \vec{b}'), \quad (23)$$

$$E_3(\vec{a}, \vec{b}) = R_{11}(\vec{a}', \vec{b}) - R_{12}(\vec{a}', \vec{b}) - R_{21}(\vec{a}', \vec{b}) + R_{22}(\vec{a}', \vec{b}), \quad (24)$$

$$E_4(\vec{a}', \vec{b}') = R_{11}(\vec{a}', \vec{b}') - R_{12}(\vec{a}', \vec{b}') - R_{21}(\vec{a}', \vec{b}') + R_{22}(\vec{a}', \vec{b}'). \quad (25)$$

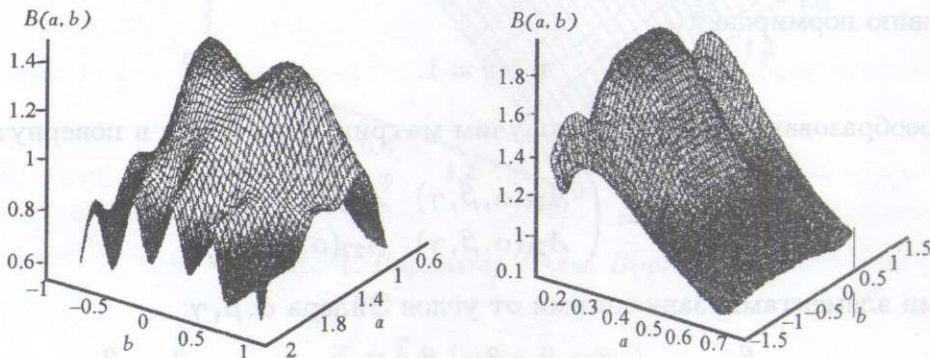


Рис. 2. Параметр Белла $V(a, b)$ с параметрами $x = y = 1/2, z = 1/3, t = 0, \alpha = 0, \gamma_1 = 2\ln|a|, \beta_1 = e^{-b^2} \sin a, \gamma_2 = \pi/4, \beta_2 = |b|e^{|a|}$. $B_{\max} = 1.41$.

Рис. 3. Параметр Белла $V(a, b)$ с параметрами $x = y = 1/2, z = 1/3, t = 0, \alpha = 0, \gamma_1 = b^2, \beta_1 = \ln|a|, \gamma_2 = \cos b \sin a, \beta_2 = 0$. $B_{\max} = 1.97$.

Используя величины (22)–(25), можно вычислить параметр Белла (11). Представленный метод иллюстрируют рис. 2 и 3. Видно, что неравенство (11) и в этом случае не нарушается, максимальное значение параметра Белла составляет $B_{\max} = 1.974$.

б. Заключение. Подведем итоги. В работе представлено два возможных метода поиска аналога известного для двух кубитов явления нелокальности для случая одного кубита. Несмотря на обнаруженное отсутствие нарушения неравенства Белла в рассмотренных примерах, вопрос об аналогии эффекта нелокальности одного кубита в предложенной постановке остается открытым, и мы рассмотрим другие примеры в последующей работе.

В. И. Манько благодарит РФФИ за поддержку (грант N 07-02-00598).

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] E. Schrödinger, *Naturwissenschaften* **23**, 807 (1935).
- [2] J. S. Bell, *Physics* **1**, 195 (1965).
- [3] V. A. Andreev, V. I. Man'ko, O. V. Man'ko, E. V. Shchukin, *Teor. Mat. Fiz.* **146**, 172 (2006).
- [4] M. A. Anisimov, M. Caponigro, S. Mancini and V. I. Man'ko, *Journal of Physics* **70**, 012002 (2007).
- [5] P. Busch and P. J. Lahti, *Nuovo Cimento* **18**, 4 (1995).
- [6] O. V. Man'ko and V. I. Man'ko, *ЖЭТФ* **85**, 430 (1997).
- [7] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика* (М., Физматлит, 2002).
- [8] Ю. Б. Белоусов, В. И. Манько, *Матрица плотности: представление и применения в статистической механике* (М., Москва, 2004).
- [9] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [10] J. S. Bell, *Speakable and Unsayable in Quantum Mechanics* (Cambridge, 1987).
- [11] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, R. A. Holt, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 880 (1969).

Поступила в редакцию 26 сентября 2008 г.