

УДК 536.48

САМОСОГЛАСОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ И СВЕРХПРОВОДЯЩИЕ КРАЕВЫЕ СОСТОЯНИЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Г. Ф. Жарков, В. Г. Жарков, А. Ю. Цветков

С использованием численных методов подробно исследованы самосогласованные решения системы нелинейных уравнений Гинзбурга–Ландау, описывающие поведение параметра порядка ψ и магнитного поля B в сверхпроводящем цилиндре радиусом R , находящемся во внешнем магнитном поле H , при наличии вихревой линии на оси цилиндра, несущей m квантов магнитного потока. Изучены особые "краевые" состояния, которые могут возникать в сверхпроводнике второго рода с ростом поля H . При переходе в такое состояние параметр порядка ψ скачком уменьшается почти до нуля вблизи края цилиндра, однако сверхпроводимость сохраняется в глубине цилиндра, на некотором расстоянии от его оси. Кратко обсуждена возможность наблюдения краевых состояний на опыте.

Поведение сверхпроводников конечных размеров в магнитном поле изучалось на основе системы нелинейных уравнений Гинзбурга–Ландау [1] во многих теоретических работах (см., например, [2–6]). Полученные в [2–6] результаты применялись, в частности, для объяснения некоторых аномалий, которые были наблюдаемы в ряде недавних экспериментов со сверхпроводниками малых размеров, помещенных в магнитное поле [7–13].

В [14] с помощью численных методов изучались самосогласованные решения нелинейных уравнений Гинзбурга–Ландау для сверхпроводящего цилиндра (в отсутствие вихрей, $m = 0$) во внешнем аксиальном магнитном поле H . Было обнаружено, что цилиндр, сделанный из сверхпроводника второго рода и находящийся в мейсснеровском

(безвихревом) состоянии, с ростом поля H может скачком перейти в особое (также безвихревое) "краевое" состояние, в котором параметр порядка ψ сильно подавлен (практически до нуля) вблизи поверхности цилиндра, однако сверхпроводимость сохраняется вблизи центра образца, где ψ конечно. Такие "краевые" состояния ранее [1–6] не изучались.

Кроме безвихревых ($m = 0$) ме́йсснеровских решений существуют более общие одномерные решения, отвечающие вихревой линии, расположенной на оси цилиндра и несущей $m = 1, 2, 3, \dots$ квантов потока. Считалось, что структура такого вихря плавно меняется с изменением магнитного поля H . Однако, как показано в настоящей работе, в цилиндре конечного радиуса вихрь (с $m > 0$) становится неустойчивым, когда поле H превышает некоторое критическое значение $H_1(m, \kappa, R)$. Здесь κ – параметр теории Гинзбурга–Ландау. После этого вихрь скачком изменяет свою форму и переходит в "краевое подавленное" состояние (edge-suppressed state, или e -состояние), сохраняя число m . В таком состоянии параметр порядка ψ сильно подавлен вблизи границы цилиндра (аналогично состояниям с $m = 0$, изученным в [14]). При дальнейшем увеличении поля краевое e -состояние плавно (фазовым переходом второго рода) переходит в нормальное состояние в поле $H_2(m, \kappa, R)$. Ранее такие модификации гигантских ($m > 1$) вихревых состояний в литературе не изучались (хотя некоторые свидетельства о наличии e -состояний можно найти также в [2, 3, 5]).

Переход сверхпроводящего образца в краевое состояние может сопровождаться скачками на зависимостях от поля H таких величин, как магнитный момент (или намагниченность образца, $-4\pi M$), полный захваченный поток (Φ_R), свободная энергия системы (G), а также другими особенностями в поведении величин, характеризующих сверхпроводящее состояние. Эти вопросы подробно освещены ниже. (В данной статье используются результаты нашей неопубликованной работы [15].)

Рассматривается длинный сверхпроводящий цилиндр радиусом R в магнитном поле H , параллельном оси цилиндра. В цилиндрической системе координат (r, φ, z) с осью z , направленной вдоль образующей цилиндра (когда векторный потенциал имеет лишь φ -компоненту, $\mathbf{A} = e_\varphi A(r)$), систему уравнений ГЛ можно записать в следующем безразмерном виде [14]:

$$\frac{d^2 U}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dU}{d\rho} - \psi^2 U = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d^2 \psi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho} + \kappa^2 (\psi - \psi^3) - \frac{U^2}{\rho^2} \psi = 0. \quad (2)$$

Вместо размерных потенциала A , поля $B = r^{-1}d(rA)/dr$ и тока j_s здесь введены безразмерные величины $U(\rho)$, $b(\rho)$ и $j(\rho)$:

$$A = \frac{\phi_0}{2\pi\lambda} \frac{U+m}{\rho}, \quad B = \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} b, \quad b = \frac{1}{\rho} \frac{dU}{d\rho}, \quad j(\rho) = j_s / \frac{c\phi_0}{8\pi^2\lambda^3} = -\psi^2 \frac{U}{\rho}, \quad \rho = \frac{r}{\lambda}. \quad (3)$$

Здесь λ – лондоновская глубина проникновения поля, ξ – длина когерентности, $\lambda = \kappa\xi$. Поле B в (3) нормировано на $H_\lambda = \phi_0/(2\pi\lambda^2)$, причем $b = B/H_\lambda$, $\phi_0 = hc/2e$ – квант потока; вместо H_λ можно нормировать на величину $H_\xi = \phi_0/(2\pi\xi^2) \equiv H_{c2}$ [16–18], или на термодинамическое критическое поле сверхпроводника, $H_c = \kappa H_\lambda/\sqrt{2}$. При этом коэффициенты в выражениях (1)–(3) несколько изменяются.

Магнитный поток, заключенный в контуре радиусом r , равен

$$\Phi = \int \mathbf{B} ds = \oint \mathbf{A} dl = \phi_0(U+m), \quad U = U(\rho), \quad \rho = \frac{r}{\lambda}.$$

Таким образом, потенциал $U(\rho)$ в принятой нами нормировке связан с потоком $\Phi(\rho)$ простой формулой $\phi \equiv \Phi/\phi_0 = U(\rho) + m$.

Поскольку магнитный поток через контур нулевого радиуса равен нулю, а поле $B|_{r=R} = H$, то уравнению (1) отвечают следующие граничные условия:

$$U|_{\rho=0} = -m, \quad \left. \frac{dU}{d\rho} \right|_{\rho=R_\lambda} = h_\lambda, \quad (4)$$

где $R_\lambda = R/\lambda$, $h_\lambda = H/H_\lambda$, $H_\lambda = \phi_0/(2\pi\lambda^2)$.

Что касается уравнения (2), то на внешней поверхности цилиндра мы примем обычное граничное условие [1] $d\psi/d\rho|_{\rho=R_\lambda} = 0$. В центре сверхпроводника параметр порядка либо максимален (при $m = 0$), либо (при $m > 0$) равен нулю на оси вихря [16–18], поэтому уравнению (2) отвечают граничные условия:

$$\left. \frac{d\psi}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0, \quad \left. \frac{d\psi}{d\rho} \right|_{\rho=R_\lambda} = 0, \quad (m = 0), \quad (5)$$

$$\psi|_{\rho=0} = 0, \quad \left. \frac{d\psi}{d\rho} \right|_{\rho=R_\lambda} = 0, \quad (m > 0). \quad (6)$$

Магнитный момент (или намагниченность) цилиндра, отнесенный к единице объема, равен:

$$\frac{M}{V} = \frac{1}{V} \int \frac{B-H}{4\pi} dv = \frac{B_{av} - H}{4\pi}, \quad B_{av} = \frac{1}{V} \int B(\mathbf{r}) dv = \frac{1}{S} \Phi_R, \quad (7)$$

где B_{av} – среднее значение поля в сверхпроводнике, $\Phi_R = \Phi(R_\lambda)$, $S = \pi R^2$. В нормировке (3), обозначив $\bar{b} = B_{av}/H_\lambda$, $M_\lambda = M/H_\lambda$, находим из (7):

$$4\pi M_\lambda = \bar{b} - h_\lambda, \quad \bar{b} = \frac{2}{R_\lambda^2}(U_R + m), \quad \phi_R = \frac{\Phi_R}{\phi_0} = U_R + m, \quad U_R = U(R_\lambda), \quad R_\lambda = \frac{R}{\lambda}. \quad (8)$$

Для разности свободных энергий системы в сверхпроводящем и нормальном состояниях, $\Delta G = G_s - G_n$, удобно использовать точное выражение

$$\Delta G = \mathcal{F}_{s0} - \frac{1}{2}MH + \frac{\phi_0 Z}{8\pi}m(B(0) - H), \quad (9)$$

где

$$\mathcal{F}_{s0} = \frac{H_c^2}{8\pi} \int \left[\psi^4 - 2\psi^2 + \xi^2 \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 \right] dv, \quad H_c = \frac{\phi_0}{2\sqrt{2\pi}\lambda\xi},$$

M – магнитный момент цилиндра, Z – его длина, m – магнитное квантовое число, $B(0)$ – значение магнитного поля на оси цилиндра, H – внешнее поле. Выражение (9) следует из общей формулы, полученной в [19] для свободной энергии полого сверхпроводящего цилиндра, при устремлении радиуса полости к нулю. Используя нормировку (3), а также (8), запишем выражение (9) в нормированном виде:

$$\Delta g = \Delta G / \left(\frac{H_c^2}{8\pi} V \right) = g_0 - \frac{8\pi M_\lambda}{\kappa^2} h_\lambda + \frac{4m}{\kappa^2} \frac{b(0) - h_\lambda}{R_\lambda^2}, \quad (10)$$

$$g_0 = \frac{2}{R_\lambda^2} \int_0^{R_\lambda} \rho d\rho \left[\psi^4 - 2\psi^2 + \frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{d\psi}{d\rho} \right)^2 \right].$$

Формулы (3), (8), (10) используются далее при вычислении соответствующих величин.

Напомним, что лондоновская длина λ и длина когерентности $\xi = \lambda/\kappa$ зависят от температуры. Поэтому приведенные выражения являются неявными функциями температуры и формально справедливы при любой T . (Впрочем, сами уравнения Гинзбурга-Ландау применимы лишь в пределе $T \rightarrow T_c$ [20], когда для длины когерентности можно использовать выражение $\xi(T) = \xi_0/\sqrt{1 - T/T_c}$.)

Применялась следующая итерационная процедура нахождения самосогласованных решений системы уравнений (1)–(6). Первоначально мы задавали некоторую пробную функцию $\psi(\rho)$ и находили решение уравнений (1), (4) для функции $U(\rho)$. Найденная $U(\rho)$ подставлялась затем в уравнение (2) и с учетом граничных условий (5), (6) находилась новая функция $\psi(\rho)$. Далее вновь решалось уравнение (1) и вся процедура повторялась, пока функции $U(\rho)$ и $\psi(\rho)$ не переставали меняться и, таким образом, представляли

собой самосогласованное решение системы. Очевидно, что найденное таким методом решение устойчиво, поскольку оно не зависит от наложения малых возмущений (см. подробнее [21]).

Результаты проведенных нами вычислений приведены ниже для случая сверхпроводников II рода ($\kappa \geq 1$) и представлены ниже в виде ряда графиков, иллюстрирующих разные аспекты изучаемой многопараметрической задачи. (Некоторые из графиков аналогичны содержащимся в работах [2-6], однако для целостности картины мы воспроизвели их своим методом для других значений параметров.)

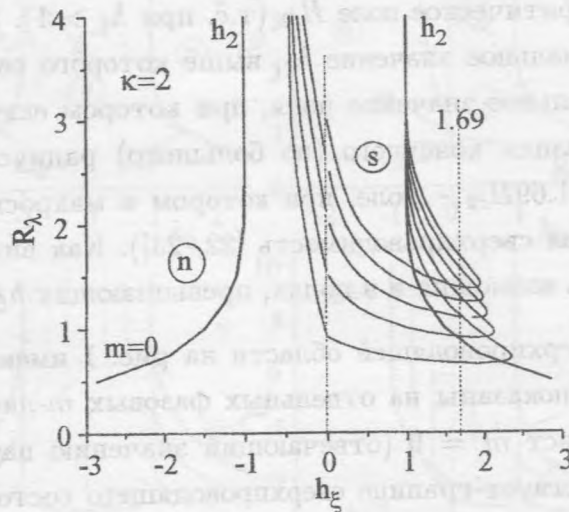


Рис. 1. Фазовые кривые $h_2 = H_2(m, \kappa, R)/H_{c2}$ для сверхпроводника II рода ($\kappa = 2$). Числа на кривых – значения магнитного квантового числа m . Значение $h_\xi = 1$ соответствует критическому полю $H_{c2} = \phi_0/(2\pi\xi^2)$. Значение $h_\xi = 1.69$ соответствует критическому полю $H_{c3} = H_2(m, \kappa, R)$, в котором еще возможна поверхностная сверхпроводимость в массивных образцах ($H_2(m, \kappa, R) \rightarrow 1.69H_{c2}$ при $R \gg \lambda$ и $m \gg 1$).

Очевидно, что при больших значениях внешнего поля H сверхпроводящее состояние разрушается и происходит переход в нормальное состояние. На рис. 1 изображена фазовая диаграмма, разделяющая сверхпроводящее и нормальное состояния на плоскости переменных $R_\lambda = R/\lambda$ и $h_\xi = H/H_\xi$ (при $\kappa = 2$ и разных m). Фазовая диаграмма представляет собой многолистную поверхность, каждый лист которой отвечает определенному значению магнитного квантового числа m . Лист с $m = 0$ лежит ниже всех других (в порядке роста m), над ним лежит лист $m = 1$, еще выше – лист $m = 2$, и т.д.

(Мы ограничимся рассмотрением значений $m \geq 0$, поскольку результаты для $m < 0$ легко воспроизводятся с учетом симметрии $(m, H) \iff (-m, -H)$.)

На каждом из m -листов фазовой поверхности расположена критическая кривая $h_2 = H_2(m, \kappa, R)/H_\xi$, ограничивающая область значений (R_λ, h_ξ) , где существуют сверхпроводящие решения задачи с $\psi > 0$ (вне этой области возможно лишь нормальное состояние с $\psi = 0$). В случае массивного цилиндра ($R_\lambda \gg 1$) граница сверхпроводящего состояния (для сверхпроводника II рода с $\kappa \geq 1$) лежит при $h_\xi = H/H_\xi = 1$, т.е. при $H = H_{c2} = \phi_0/(2\pi\xi^2)$ [16–18] ($H_{c2} \equiv H_\xi$). Как видно из рис. 1, при малых R_λ сверхпроводящие состояния (с различными значениями $m > 0$) возможны в полях, превышающих критическое поле H_{c2} (т.е. при $h_\xi > 1$). При фиксированных R_λ и m существует максимальное значение h_ξ , выше которого сверхпроводящее состояние невозможно. Максимальное значение поля, при котором еще возможно сверхпроводящее состояние в образцах конечного (но большого) радиуса, равно $h_\xi = 1.69$ (т.е. $H = H_{c3}$, где $H_{c3} = 1.69H_{c2}$ – поле, при котором в макроскопических образцах реализуется поверхностная сверхпроводимость [22, 23]). Как видно из рис. 1, при малых R_λ сверхпроводимость возможна и в полях, превышающих $h_\xi = 1.69$.

Внутри каждой сверхпроводящей области на рис. 1 имеются особенные линии h_1 , которые для ясности показаны на отдельных фазовых m -листах (рис. 2). На рис. 2а изображен фазовый лист $m = 0$ (отвечающий значению параметра $\kappa = 2$). Сплошная линия h_2 соответствует границе сверхпроводящего состояния. Буквой s отмечена область, где существует сверхпроводящее состояние ($\psi \neq 0$), буква n означает нормальное состояние ($\psi \equiv 0$). Центральная часть рисунка (лежащая вблизи $h_\xi \sim 0$) соответствует сверхпроводящему мейсснеровскому состоянию. Здесь параметр порядка $\psi \sim 1$, а внешнее магнитное поле H почти полностью экранируется и не проникает в глубь сверхпроводника (конкретные зависимости параметра порядка ψ и магнитного поля B в сверхпроводнике от пространственной координаты r показаны ниже на рис. 5). Точечная линия h_1 на рис. 2а, лежащая внутри сверхпроводящей области, отмечает границу, при пересечении которой изображающей точкой (R_λ, h_ξ) мейсснеровские решения (с ростом поля) становятся неустойчивыми и перестраиваются, причем происходит переход скачком в новое устойчивое сверхпроводящее состояние (см. точки 5, 6 на рис. 3а), которое можно назвать "краевым" (или "rim-suppressed" [14]). В этом состоянии параметр порядка $\psi(r)$ оказывается сильно подавленным в некотором слое, лежащем вблизи границы сверхпроводника, причем магнитное поле в краевом слое практически не экранируется и свободно в него проникает [14]. При этом величина параметра

порядка ψ_0 в центре сверхпроводника сохраняет конечное значение. По мере приближения изображающей точки (R_λ, h_ξ) к критической линии h_2 значение ψ_0 уменьшается. На самой критической линии h_2 параметр порядка равен нулю всюду, $\psi(r) \equiv 0$, а магнитное поле полностью проникает в образец ($B(r) = H$), что соответствует переходу в нормальное состояние.

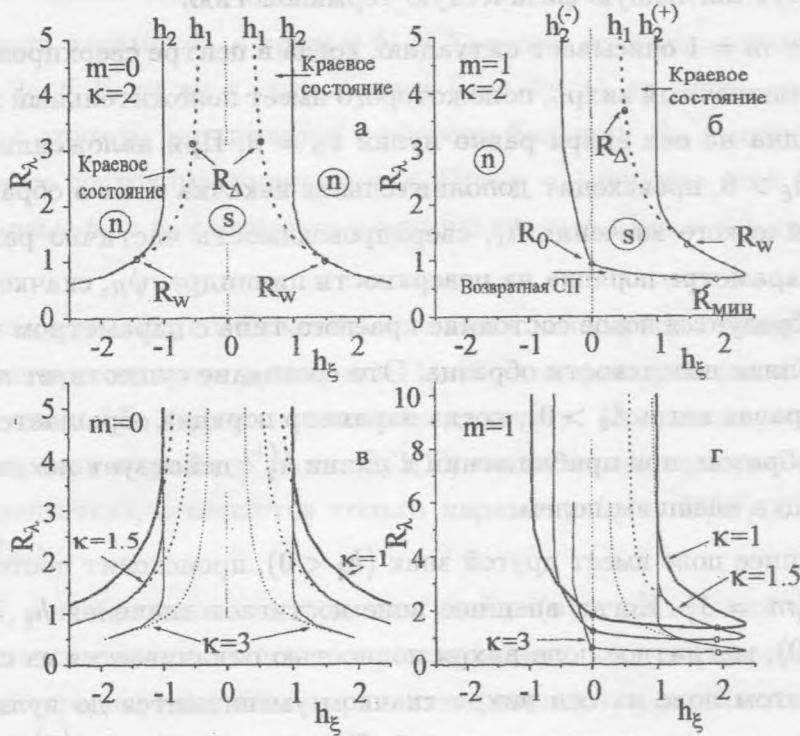


Рис. 2. а - случай $m = 0, \kappa = 2$. Фазовая кривая h_2 разделяет сверхпроводящие (s) и нормальные (n) состояния цилиндра. При пересечении изображающей точки (R_λ, h_ξ) линии h_1 (точечная кривая) возникает краевое состояние, с подавленным значением ψ_R (рис. 5). При $R_\lambda < R_w$ краевое состояние не возникает. При $R_\lambda = R_\Delta$ исчезает скачок намагниченности. Точки 5,6 на рис. За сливаются в точку 4 на рис. 3(z), где $dM_\lambda/dh_\lambda = \infty$. (б) - аналогично для случая $m = 1, \kappa = 2$. При $R_\lambda < R_0$ поле $h_\xi > 0$ стимулирует сверхпроводящее состояние и возможна возвратная сверхпроводимость; (в, г) - аналогичные кривые для $\kappa = 1, 1.5, 3$.

Ширина области на рис. 2а, где реализуется краевое состояние с $m = 0$, уменьшается при уменьшении радиуса цилиндра $R_\lambda = R/\lambda$. Одновременно уменьшается величина скачка и при $R_\lambda = R_\Delta$ скачок исчезает. При дальнейшем уменьшении R_λ исчезает также и область существования краевого состояния, $w = h_2 - h_1$ ($w = 0$ при $R_\lambda = R_w$).

Очевидно, что картина, представленная на рис. 2а, симметрична относительно оси $h_\xi = 0$.

Более сложная картина возникает на фазовом листе $m = 1$, рис. 2б. Здесь критическая кривая h_2 (сплошная линия) расположена асимметрично [2] относительно оси $h_\xi = 0$, причем область, где существует состояние краевого типа, имеется лишь при $h_\xi > 0$, и отсутствует при $h_\xi < 0$. Этот факт можно интерпретировать следующим образом, используя наглядную физическую терминологию.

Фазовый лист $m = 1$ описывает ситуацию, когда в центре сверхпроводящего цилиндра расположен одиночный вихрь, поле которого имеет положительный знак, а значение параметра порядка на оси вихря равно нулю: $\psi_0 = 0$. При наложении внешнего поля того же знака, $h_\xi > 0$, происходит дополнительная накачка поля в образец. Когда поле достигает критического значения h_1 , сверхпроводимость частично разрушается (при этом значение параметра порядка на поверхности цилиндра, ψ_R , скачком уменьшается, рис. 4в, 5а), и образуется новое состояние краевого типа с параметром порядка, сильно подавленным вблизи поверхности образца. Это состояние существует вплоть до значения $h_\xi = h_2^{(+)}$ (правая ветвь $h_2 > 0$), когда параметр порядка обращается в ноль во всех точках. Таким образом, при приближении к линии $h_2^{(+)}$ действует механизм подавления параметра порядка внешним полем.

Если же внешнее поле имеет другой знак ($h_\xi < 0$), происходит постепенная откачка поля из вихря ($m = 1$). Когда внешнее поле достигает значения $h_\xi = h_2^{(-)} < 0$ (левая ветвь $h_2 < 0$), магнитное поле вихря полностью откачивается из сверхпроводника (рис. 5б). При этом поле на оси вихря скачком уменьшается до нуля; исчезает также и параметр порядка в состоянии $m = 1$. Поэтому при $h_\xi < h_2^{(-)}$ сверхпроводящие решения уравнений с $m = 1$ становятся невозможны и происходит переход либо в нормальное состояние ($\psi \equiv 0$), либо в безвихревое состояние с $m = 0$. Таким образом, при приближении к линии $h_2^{(-)}$ действует механизм откачки поля из центра вихря. Этим обстоятельством и объясняется асимметричное поведение кривых $h_2^{(-)}$ и $h_2^{(+)}$ на рис. 2б.

Асимметрия кривых $h_2^{(-)}$ и $h_2^{(+)}$ проявляется также в том, что эти кривые подходят к оси $h_\xi = 0$ с разными производными (точка излома кривых при $h_\xi = 0$ отмечена светлым кружком на рис. 2б; ей отвечает значение R_0 на оси R_λ).

Отметим еще одну особенность кривых, изображенных на рис. 2б. В случае малых радиусов (при $R_\lambda < R_0$ и $m = 1$) существует интервал полей, когда сверхпроводящее состояние, невозможное при малых $h_\xi \approx 0$, вновь становится возможным при увеличении h_ξ . Здесь проявляется частный случай так называемой "возвратной" (или "re-entry")

сверхпроводимости. В цилиндре очень малого радиуса ($R_\lambda < R_0$) магнитное поле, связанное с вихрем ($m = 1$), не может удержаться внутри сверхпроводника и диссипирует наружу через его поверхность. Однако, наложение конечного внешнего магнитного поля предотвращает диссипацию поля вихря и стабилизирует сверхпроводящее состояние. При дальнейшем увеличении внешнего поля сверхпроводящее состояние все же разрушается. Поэтому на нижней части кривой h_2 на рис. 2б имеется минимум при $R_\lambda = R_{\lambda min}$, отмеченный светлым кружком.

При увеличении параметра κ кривые h_1 и h_2 ведут себя аналогично тому, что изображено на рис. 2а, б. Если же κ уменьшается (рис. 2в, г), то точка, где кривые h_1 и h_2 сливаются друг с другом, поднимается в сторону больших R_λ , а ширина области, где существует краевое состояние, уменьшается. При $\kappa < 1$ ширина этой области обращается в ноль, а кривые h_1 и h_2 сливаются в единую кривую. При $\kappa < 1$ краевые состояния отсутствуют.

Вернемся вновь к рис. 2а, где каждой точке, лежащей внутри s -области, соответствует некоторое решение системы уравнений (1)–(6) для функций ψ и U . При движении изображающей точки (R_λ, h_ξ) это состояние меняется. Проследим, что происходит с этим состоянием, если параметр $R_\lambda = R/\lambda(T)$ остается постоянным (т.е. температура образца не меняется), а меняется только параметр $h_\xi = H/H_\xi(T)$ (или параметр $h_\lambda = H/H_\lambda = \kappa^2 h_\xi$).

На рис. 3а, б, в изображены как функции от h_λ : (а) – магнитный момент системы, $(-4\pi M_\lambda)$; (б) – максимальное значение параметра порядка в сверхпроводнике, ψ_{max} ; (в) – значение параметра порядка на поверхности цилиндра, ψ_R . (Все для случая $m = 0$, $\kappa = 2$; сверхпроводящая область s на рис. 2а проходит по линии $R_\lambda = 5$.) По оси абсцисс отложена величина $h_\lambda = H/H_\lambda$. Светлыми кружками отмечены точки, которые заслуживают особого комментария.

Как видно из рис. 3а, величина магнитного момента линейно возрастает при малых $h_\lambda > 0$ ($h_\lambda = 0$ в точке 4). Этот начальный линейный участок отвечает эффекту Мейснера, т.е. выталкиванию внешнего поля из образца. При дальнейшем увеличении поля магнитный момент возрастает вплоть до точки 5, где намагниченность скачком уменьшается и принимает значение, отмеченное точкой 6. Здесь цилиндр переходит в краевое подавленное состояние (e_0). В точке 7 происходит окончательный переход в нормальное состояние ($\psi \equiv 0$, $B = H$).

Аналогичные скачки имеются и в поведении величин, изображенных на рис. 3б, в. Особенно сильно меняется значение параметра порядка на поверхности цилиндра ψ_R

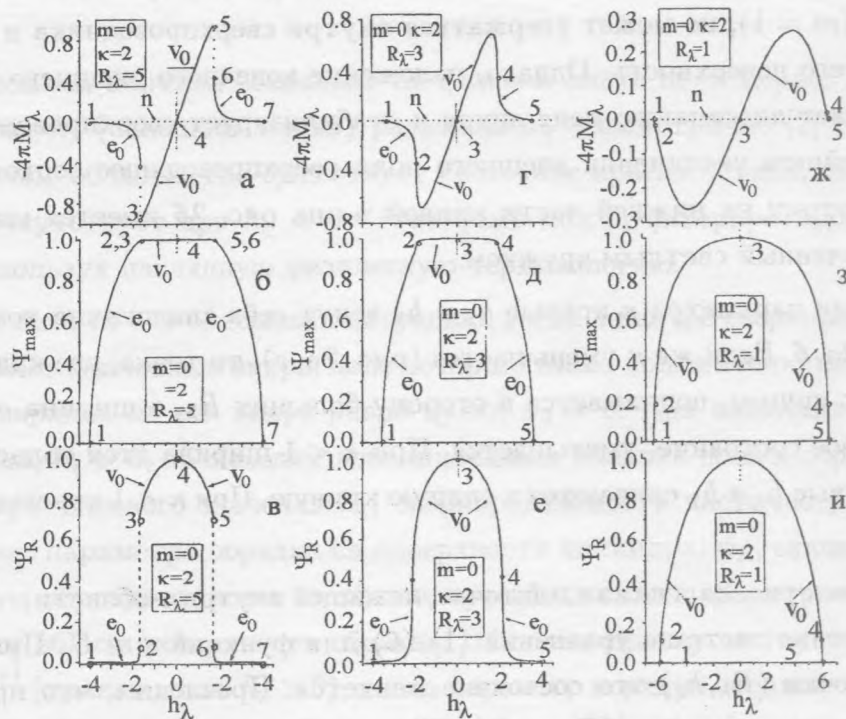


Рис. 3. Кривые намагниченности ($-4\pi M_\lambda$), ψ_{max} и ψ_R как функций от h_λ для $m = 0$, $\kappa = 2$ при разных R_λ . Безвихревое мейсснеровское состояние обозначено буквой v_0 . Краевое состояние обозначено буквой e_0 . (Профиль решений в случае $m = 0$, $R_\lambda = 5$ показан в [14].)

(рис. 3в): в точке 5 $\psi_R = 0.706$ при $h_\lambda = 1.6837$; в точке 6 $\psi_R = 0.087$ при $h_\lambda = 1.6838$.

На рис. 3(г, д, е) показано, что происходит при меньшем радиусе цилиндра ($R_\lambda = 3$). На кривой намагниченности (рис. 3г) исчезают скачки, которые представлены пунктиром на рис. 3а. Однако на кривой намагниченности остаются точки перегиба (2 и 4), где кривая ($-4\pi M_\lambda$) имеет максимальную производную. Соответствующие точки отмечены на рис. 3(д, е) теми же цифрами 2 и 4. Поведение тех же величин при $R_\lambda = 1$ показано на рис. 3(ж, з, и). В случае $R_\lambda < 1$ на кривых ($-4\pi M_\lambda$) уже нет точки перегиба при $h_\lambda > 0$.

Все кривые на рис. 3 (при $m = 0$) симметричны относительно точки $h_\lambda = 0$.

Несколько иная картина возникает при движении изображающей точки в сверхпроводящей области z на рис. 2б (область z при наличии вихря ($m = 1$, $\kappa = 2$) проходит по линии $R_\lambda = 5$). Это видно из кривых, представленных на рис. 4(а, б, в). На этих кривых также имеются скачки, однако кривые асимметричны относительно $h_\lambda = 0$. В

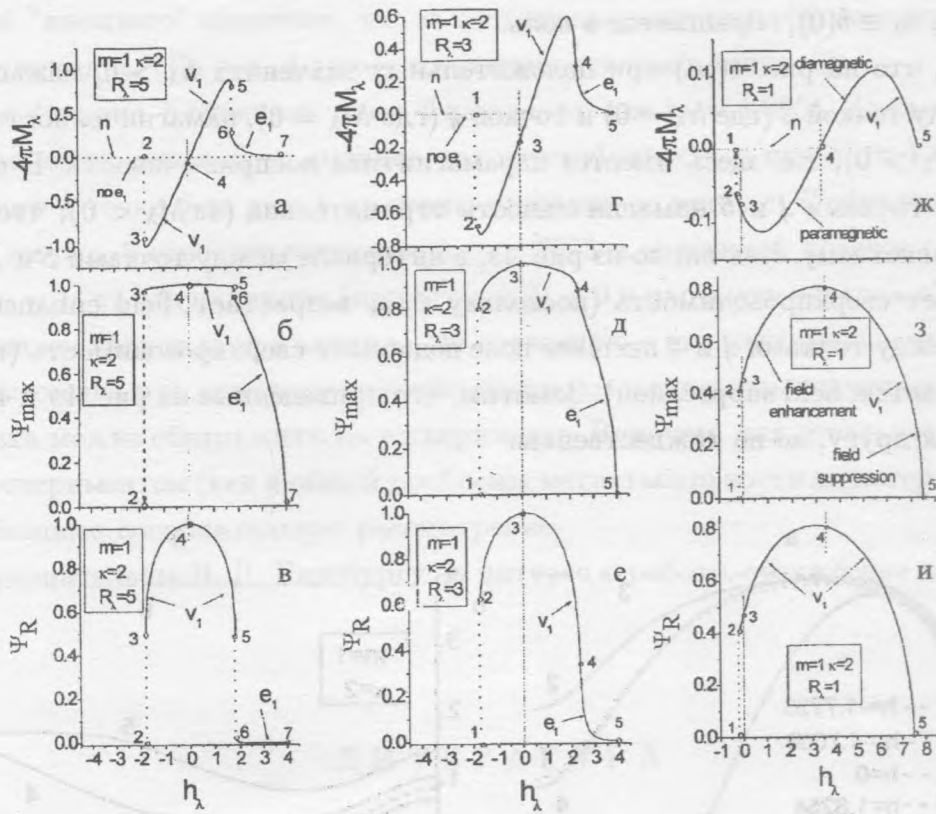


Рис. 4. То же, что на рис. 3, но для случая $m = 1$. Буква v_1 обозначает вихревое состояние мейснеровского типа (с вихрем $m = 1$ на оси цилиндра). Буква e_1 означает краевое состояние при наличии вихря ($m = 1$) на оси цилиндра. (Профиль решений в случае $m = 1$, $R_\lambda = 5$ показан на рис. 5.)

частности, на кривой намагниченности (рис. 4а) при $h_\lambda < 0$ отсутствует "хвост", который имеется при $h_\lambda > 0$ после точки 5. Эта асимметрия (как уже отмечалось выше), объясняется различием в механизмах разрушения сверхпроводящего состояния $m = 1$ магнитным полем H : при $H > 0$ происходит дополнительная накачка поля в сверхпроводник, с последующим подавлением параметра порядка и переходом в нормальное состояние; при $H < 0$ поле откачивается из вихря и происходит переход в безвихревое состояние $m = 0$ (либо в нормальное состояние).

Аналогичная картина (при $m = 1$, $\kappa = 2$) изображена на рис. 4г, д, е ($R_\lambda = 3$) и 4ж, з, и ($R_\lambda = 1$).

В отличие от рис. 3 ($m = 0$), все кривые на рис. 4 ($m = 1$) при $h_\lambda < 0$ (левее точек

2) не имеют плавного "хвоста", а оканчиваются резким скачком в точке 2, когда поле на оси вихря, $b_0 \equiv b(0)$, обращается в ноль.

Отметим, что на рис. 4(ж) при положительных значениях $h_\lambda > 0$, лежащих в интервале между точкой 3 (где $h_\lambda = 0$) и точкой 4 (где $M_\lambda = 0$), намагниченность положительна ($4\pi M_\lambda > 0$), т.е. здесь имеется парамагнитная восприимчивость. В интервале полей между точками 4 и 5 намагниченность отрицательна ($4\pi M_\lambda < 0$), что соответствует диамагнетизму. Как видно из рис. 4з, в интервале между точками 3 и 4 внешнее поле облегчает сверхпроводимость (поскольку ψ_{max} возрастает, field enhancement). В интервале между точками 4 и 5 внешнее поле подавляет сверхпроводимость (поскольку ψ_{max} уменьшается, field suppression). Заметим, что приведенные на рис. 4з и 4и кривые близки друг к другу, но не тождественны.

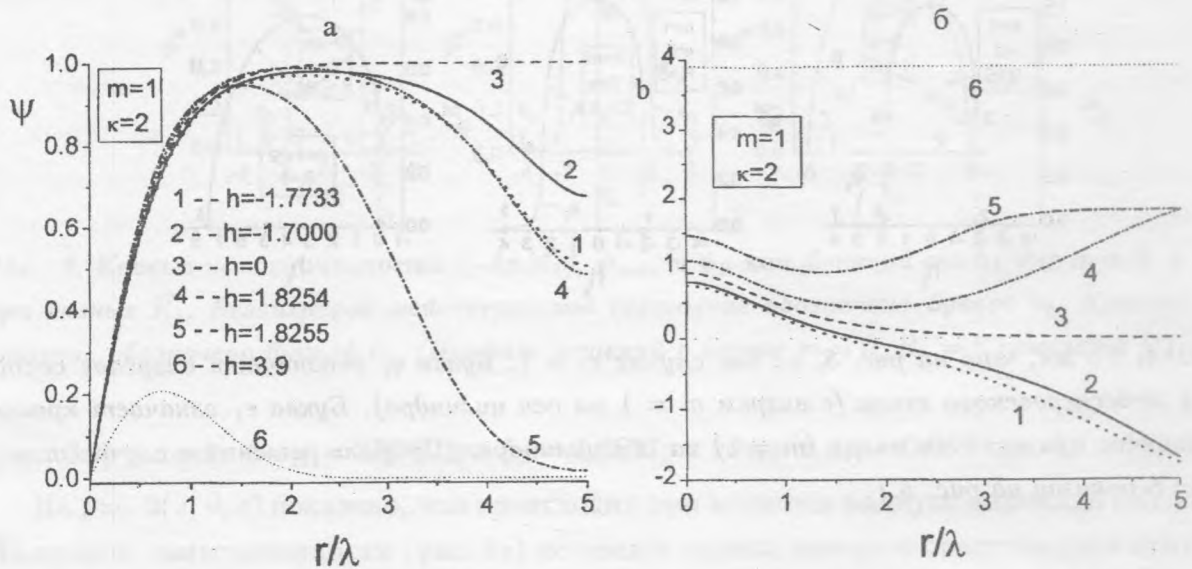


Рис. 5. Параметр порядка $\psi(r)$ и поле $b(r)$ в состоянии с $m = 1$, $\kappa = 2$, $R_\lambda = 5$ при разных значениях поля h_λ (указаны на рисунке). Кривые 4 отвечают состоянию мейсснеровского типа (v_1), кривые 5 - краевое e_1 -состояние. Скачок из v_1 - в e_1 -состояние происходит при изменении поля $\Delta h_\lambda < 1 \cdot 10^{-4}$.

Приведем примеры конкретных решений уравнений (1)–(6) как функций от координаты $\rho = r/\lambda$ ($0 \leq r \leq R$) при $m = 1$. (Решения, возникающие в безвихревом состоянии ($m = 0$), приведены в [14], рис. 2.) На рис. 5 показаны решения в случае $R_\lambda = 5$, $m = 1$ для ряда значений h_λ , указанных на рисунке. Отметим, что кривая 3 на рис. 5 отвечает значению $h_\lambda = 0$ и описывает метастабильное вихревое состояние v_1 мейсснеровского

типа с $m = 1$. В этом состоянии вихрь удерживается внутри однородного сверхпроводника силой "внешнего" пиннинга, т.е. за счет неоднородности, обусловленной наличием границы цилиндра. (На рис. 4 этому состоянию отвечает точка 4.)

Кривая 4 на рис. 5 отвечает точке 5 на рис. 4а, где $h_\lambda = 1.8254$. Здесь оканчивается устойчивая ветвь решений v_1 , развивается неустойчивость и при $h_\lambda = 1.8255$ решение v_1 переходит в точке 6 на рис. 4 на новую устойчивую ветвь e_1 ("edge state" с $m = 1$). Кривая 5 на рис. 5 отвечает значению $h_\lambda = 1.8255$ и описывает краевое состояние e_1 с вихрем ($m = 1$) на оси цилиндра (при этом $\psi(0) = 0$ и параметр порядка дополнительно резко подавлен вблизи края цилиндра, по сравнению с его максимальным значением).

Не исключено, что отмеченные особенности поведения намагниченности и параметра порядка можно обнаружить на эксперименте. Впрочем, для детального обсуждения связи с экспериментом (как и общей проблемы метастабильности и гистерезисных явлений) необходимо дополнительное рассмотрение.

Мы признательны В. Л. Гинзбургу за интерес к работе, обсуждение и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д. ЖЭТФ, **10**, 1064 (1950).
- [2] Fink H. J., Presson A. G. Phys. Rev., **151**, 219 (1966); **168**, 319 (1968).
- [3] De la Cruz F., Fink H. J., Luzuriaga J. Phys. Rev. B, **20**, 1947 (1979).
- [4] Moshchalkov V. V., Qiu X. G., Bruynndoncx V. Phys. Rev. B, **55**, 11793 (1997).
- [5] Schweigert V. A., Peeters F. M., et al. Phys. Rev. Lett., **79**, 4653 (1997); **81**, 2783 (1998); Phys. Rev. B, **57**, 13817 (1998); **59**, 6039 (1999).
- [6] Palacios J. J. Phys. Rev. B, **58**, R5948 (1998); Phys. Rev. Lett., **84**, 1796 (2000).
- [7] Dolan G. J. Low Temp. Phys., **15**, 133 (1974).
- [8] Buisson O. et al. Phys. Lett. A, **150**, 36 (1990).
- [9] Moshchalkov V. V. et al. Nature (London), **373**, 319 (1995).
- [10] Geim A. K. et al. Nature (London), **390**, 259 (1997); **396**, 144 (1998).
- [11] Bezryadin A., Pannetier B. J. of Low Temp. Phys., **102**, 73 (1996).
- [12] Benoist R., Zwirger W. Z. Phys. B, **103**, 377 (1997).
- [13] Bolle C. A. et al. Nature, **399**, 43 (1999).

- [14] Z h a r k o v G. F., Z h a r k o v V. G., Z v e t k o v A. Yu. Phys. Rev. B, **61**, 12293 (2000).
- [15] Ж а р к о в Г. Ф., Ж а р к о в В. Г., Ц в е т к о в А. Ю. cond-mat/0008217 (2000).
- [16] D e G e n n e s P. G. Superconductivity of Metals and Alloys (Addison-Wesley, New York, 1989).
- [17] T i n k h a m M. Introduction to Superconductivity (McGraw Hill, New York, 1975).
- [18] A b r i k o s o v A. A. Fundamentals of the Theory of Metals (North-Holland, Amsterdam, 1988).
- [19] А р у т ю н я н Р. М., Г и н з б у р г В. Л., Ж а р к о в Г. Ф. ЖЭТФ, **111**, 2175 (1997).
- [20] Г о р ь к о в Л. П. ЖЭТФ, **37**, 1918 (1969).
- [21] Z h a r k o v G. F., Z h a r k o v V. G. Physica Scripta, **57**, 664 (1998).
- [22] S a i n t - J a m e s D., D e G e n n e s P. Phys. Lett., **7**, 306 (1963).
- [23] S a i n t - J a m e s D. Phys. Lett., **15**, 13 (1965).

Поступила в редакцию 14 декабря 2001 г.