

УДК 533.9

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КООРДИНАТ КАССИНИ ДЛЯ РАСЧЕТА СИЛЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ПЫЛИНОК

В. А. Гундиенков, С. И. Яковленко

*С использованием координат Кассини численно решено уравнение Пуассона–Больцмана для облака зарядов, окружающих две заряженные пылинки. Сила воздействия электрического поля на пылинку определялась интегрированием электрического давления на поверхность пылинки. Показано, что для расстояний между пылинками порядка дебаевского радиуса и порядка среднего расстояния может иметь место притяжение пылинок. Притяжение резко уменьшается, когда заряд пылинок существенно меньше заряда частиц плазмы, окружающей пылинку.*

Согласно экспериментам [1 – 3] пылинки микронных размеров в термоэмиссионной плазме, плазме газового разряда и ядерно-возбуждаемой плазме могут образовывать пространственные структуры. В связи с этим естественно предположить наличие сил притяжения между заряженными пылинками, окруженными облаками частиц противоположного знака. Согласно численным расчетам [4, 5] и результатам приближенного рассмотрения [6] притяжение между пылевыми частицами должно иметь место. Однако точное решение уравнения Пуассона–Больцмана показывает, что для заряженных плоскостей как в облаке электронов, так и в плазме всегда имеет место отталкивание, а не притяжение [7].

В связи с этим вопрос о взаимодействии пылинок в облаке электронов и в плазме рассмотрен в данной работе на основе вычислений потенциала с высокой точностью.

Пусть электронный газ, окружающий заряженные частицы, формируется за счет эмиссии электронов из пылинок, имеющих достаточно высокую температуру  $T$ . Кроме того, пылинки находятся в частично ионизованном газе. Для нахождения распределения по пространству потенциала  $\phi$ , напряженности поля  $-\nabla\phi$  и плотности заряда  $\rho = e(N_i - N_e)$  следует решить уравнение Пуассона  $\nabla(-\nabla\phi) = 4\pi\rho$ . В этом уравнении плотности ионов  $N_i$  и электронов  $N_e$  определяются распределением Больцмана  $N_i = N_{i0} \exp(-e\phi/T)$ ,  $N_e = N_{e0} \exp(e\phi/T)$ , где  $N_{i0}$ ,  $N_{e0}$  – плотности ионов и электронов в тех точках, где потенциал равен нулю;  $\nabla$  – гамильтонов векторный оператор.

Итак, уравнение Пуассона–Больцмана имеет вид:

$$\Delta\phi = 4\pi e(N_{e0} \exp(e\phi/T) - N_{i0} \exp(-e\phi/T)), \quad (1)$$

где  $\Delta = \nabla^2$  – оператор Лапласа; температура частиц и плазмы считается одинаковой.

Будем измерять длину в единицах дебаевского радиуса  $r_D = (T/4\pi e^2 N_{e0})^{1/2}$ , соответствующего плотности электронов в тех точках, где потенциал равен нулю. Введем безразмерные величины – потенциал  $\varphi$ , напряженность поля  $\mathbf{E}$  и плотность электронов  $n_e$  – с помощью соотношений:

$$\varphi = e\phi/T; \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi \cdot er_D/T; \quad n_e = r_D^3 N_e = n_D \cdot \exp(\varphi), \quad (2)$$

где  $n_D = r_D^3 N_{e0}$  – число электронов в дебаевской сфере.

Если, например, ориентироваться на условия экспериментов [1], в которых  $N_{e0} = 2.5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ,  $T = 0.146 \text{ эВ} = 1700 \text{ К}$ , для характерных величин имеем:  $r_D = 0.002 \text{ см}$ ,  $T/e = 0.146 \text{ В}$ ,  $T/er_D = 80 \text{ В/см}$ . При среднем радиусе пылинки  $r_0 = 0.4 \text{ мкм}$  ( $r_0/r_D = 0.02$ ) и ее заряде  $Z_p e = 500e$  имеем напряженность поля на поверхности частицы  $Z_p e/r_0^2 = 4.5 \cdot 10^4 \text{ В/см}$  ( $E_0 = E(r_0) = 550$ ).

Для безразмерных величин уравнение (1) сводится к следующему уравнению для безразмерного потенциала  $\varphi$ :

$$\Delta\varphi = \exp(\varphi) - \delta \exp(-\varphi), \quad (3)$$

где  $\delta = N_{i0}/N_{e0}$  – параметр, характеризующий дополнительную ионизацию газа. При этом  $\nabla\mathbf{E} = -(\exp(\varphi) - \delta \exp(-\varphi))$ ,  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ . В силу квазинейтральности плазмы:  $0 \leq \delta \leq 1$ .

Уравнение (3) допускает полное аналитическое исследование лишь в плоском случае [7 – 9].

Одиночную заряженную пылинку, окруженную облаком более легких зарядов, находящихся в термодинамическом равновесии, следуя [10], будем называть дебаевским атомом, а две или несколько пылинок – дебаевской квазимолекулой [4, 5]. Рассмотрение дебаевского атома и дебаевской квазимолекулы с формальной точки зрения отличается лишь геометрией задачи. При рассмотрении дебаевского атома, ориентируясь на сферически симметричное электронное облако, можно обойтись решением одномерного уравнения Пуассона. При рассмотрении же двухатомной дебаевской квазимолекулы можно считать задачу симметричной относительно оси  $z$ , соединяющей ядра (пылинки). Тогда достаточно рассмотреть двумерное уравнение (3) в плоскости координат  $z, y$ . При этом существенное усложнение задачи при переходе к рассмотрению дебаевской квазимолекулы связано с выбором граничных условий.

В реальной физической задаче задан заряд пылинок  $Z_p e$  и их радиус  $r_0$  (о формировании заряда пылинки см. [11]). Следовательно, одним из граничных условий является условие на напряженность поля на поверхности пылинок  $S$ :

$$\mathbf{E}_0 = -\nabla\varphi|_S. \quad (4)$$

При этом заряд частицы определяется выражением:

$$Z_p = \frac{-r_D^2}{4\pi e} \int_S \nabla\phi ds, \quad z_p = \int_S \mathbf{E} ds. \quad (5)$$

Здесь  $z_p$  – безразмерный заряд частицы, связанный с зарядом частицы в единицах электронного заряда  $Z_p$  выражением  $Z_p = z_p \cdot n_D$ ; площадь поверхности измеряется в квадратах дебаевского радиуса.

Вторым граничным условием должно быть задание поверхности  $S'$ , на которой поле равно нулю

$$\nabla\varphi|_{S'} = 0. \quad (6)$$

Нулевое значение электрического поля на границе системы следует из ее квазинейтральности.

Отметим, что основная цель рассмотрения дебаевской молекулы состоит в том, чтобы найти зависимость результирующей электростатической силы, действующей на пылинки, от расстояния между ними. В этом случае удобнее исходить из других граничных условий [4, 5]. На поверхности пылинок задается не поле, а постоянный потенциал

$$\varphi|_S = \varphi_0 = \text{const}. \quad (7)$$

Из решения уравнения Пуассона–Больцмана находится напряженность поля  $E_0$  на поверхности пылинки. Результирующая сила определяется с помощью интеграла от электростатического давления по поверхности пылинки. Для того, чтобы получить нужное значение заряда  $z_p$  (5), надо соответствующим образом изменить значение потенциала  $\varphi_0$ .

В рассматриваемом случае сила взаимодействия пылинок направлена вдоль оси  $z$  и определяется выражением:

$$F = \frac{1}{8\pi} \int_S (\nabla\phi)^2|_S ds_z, \quad f = \int_S E_0^2 ds_z. \quad (8)$$

Здесь  $ds_z$  – проекция элемента поверхности  $ds$  на ось  $z$ ; сила  $F$  связана с безразмерной силой  $f$  выражением  $F = (T^2/8\pi e^2) \cdot f$ ; электрическое давление направлено наружу поверхности пылинок.

Для точного нахождения величины силы, действующей на частицу, метод решения уравнения Пуассона–Больцмана должен обеспечивать максимальную точность в области вблизи поверхности пылинок. При этом основной интерес представляют расстояния между пылинками, намного превышающие их диаметр. В обычных системах координат этого трудно добиться. Мы использовали координаты, построенные на основе известного овала Кассини [12, 13] для некоторого его частного случая.

Связь переменных  $u, v$ , задающих точку на овале Кассини с декартовыми координатами в квадранте  $z > 0, y > 0$ , задается выражением:

$$z(u, v) = \frac{d}{2\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\exp(2u) + 2\exp(u) \cdot \cos(v) + 1} + \exp(u) \cdot \cos(v) + 1}, \quad (9a)$$

$$y(u, v) = \frac{d}{2\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\exp(2u) + 2\exp(u) \cdot \cos(v) + 1} - \exp(u) \cdot \cos(v) - 1}. \quad (9b)$$

Для всей плоскости  $z, y$  координатная сетка получается зеркальным отражением относительно осей  $z$  и  $y$ ;  $d$  – расстояние между фокусами овалов, расположенными в точках  $(-d/2, 0), (d/2, 0)$ . Переменная  $-\infty > u > -\infty$  является некоторым аналогом радиальной переменной. При  $u < 0$  кривая представляет собой два независимых овала, при  $u = 0$  координатная линия – лемниската Бернулли, т.е. овал с бесконечно узкой "талией" [12, 13]. При  $0.65 > u > 0$  имеет место овал с талией, а при  $u > 0.65$  овал имеет эллипсообразную форму. Переменная  $\pi > v > 0$  аналогична углу в полярных координатах. При  $v = 0$  точка лежит на луче  $(d/2; -\infty)$  по оси абсцисс, при  $v \rightarrow \pi$  геометрическое место точек приближается к образующим угла: отрезку  $(0, d/2)$  и к лучу  $(0, \infty)$ . Характер координатных линий для наиболее интересного случая иллюстрирует рис. 1.



Использование координат (9) дает следующие важные преимущества. Во-первых, семейство овалов Кассини качественно соответствует картине эквипотенциалей для двух одинаково заряженных частиц, находящихся в фокусах овала. Во-вторых, область, в которой мы ищем решение уравнения в этих координатах, становится прямоугольной. В-третьих, плотность овалов экспоненциально сгущается к поверхности пылинок. Это позволяет использовать равномерную сетку даже при больших расстояниях между частицами малых размеров.

Не останавливаясь на деталях, приведем основные сведения о методе решения. Координатами Кассини особенно удобно пользоваться в ситуации, когда радиус пылинок  $r_0$  много меньше как дебаевского радиуса  $r_0 \ll 1$ , так и половины среднего расстояния между пылинками  $r_0 \ll a_0 = N_p^{1/3}/2r_D$ , где  $N_p$  – плотность пылинок. Тогда, рассматривая область расстояний между частицами  $5r_0 < d < 5a_0$ , можно считать частицы овалами Кассини, близкими к окружностям. На этом овале удобно задать значение потенциала  $\varphi_0$ . В то же время, форма облака зарядов, охватывающая пылинки, описывается эллипсообразным овалом. На этом овале удобно задать нулевое значение поля.

Поверхность пылинки радиуса  $r_0$  и внешняя поверхность облака электронов, соответствующая радиусу электронного облака уединенной пылинки  $a_0$ , описывается в координатах (9) константами:

$$u_{min} = \ln \left( \frac{4r_0}{d^2} (d + r_0) \right), \quad u_{max} = \ln \left( \frac{4a_0}{d^2} (d + a_0) \right). \quad (10)$$

Граничные условия (2) при этом имеют вид:

$$\varphi|_{u=u_{min}} = \varphi_0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Big|_{u=u_{max}} = 0. \quad (11)$$

Уравнение Пуассона–Больцмана (3) с граничными условиями (11) решалось методом итераций Гаусса–Ньютона с использованием пакета программ MATLAB.

Для расчета заряда и силы взаимодействия пылинок рассматривались трехмерные координаты, образованные вращением плоских координат (9а,б) вокруг оси  $z$ . В этих координатах вычислялась сила взаимодействия пылинок по формуле (8). Энергия взаимодействия пылинок вычислялась по формуле

$$U(d) = \int_d^\infty f(x) dx + \text{const}. \quad (12)$$

В представленных ниже результатах константа подбиралась так, чтобы в минимуме энергия  $U(d)$  равнялась нулю ( $\min(U(d)) = 0$ ).

Расчеты проводились для таких параметров  $\varphi_0, r_0, a_0$ , которые при  $d \gg a_0$  соответствуют уединенному дебаевскому атому. Для этого сначала решалась сферически симметричная задача, в которой значения поля и потенциала в точке  $r = a_0$  полагались равными нулю (подробнее см. [10]):

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left( r^2 \cdot \frac{d}{dr} \varphi \right) = \exp(\varphi) - \delta \exp(\varphi), \quad E = -\frac{d}{dr} \varphi, \quad \varphi(a_0) = 0, \quad E(a_0) = 0.$$

Из решения этой задачи определялся потенциал  $\varphi_0$  на частице заданного радиуса  $r_0$  (рис. 2).

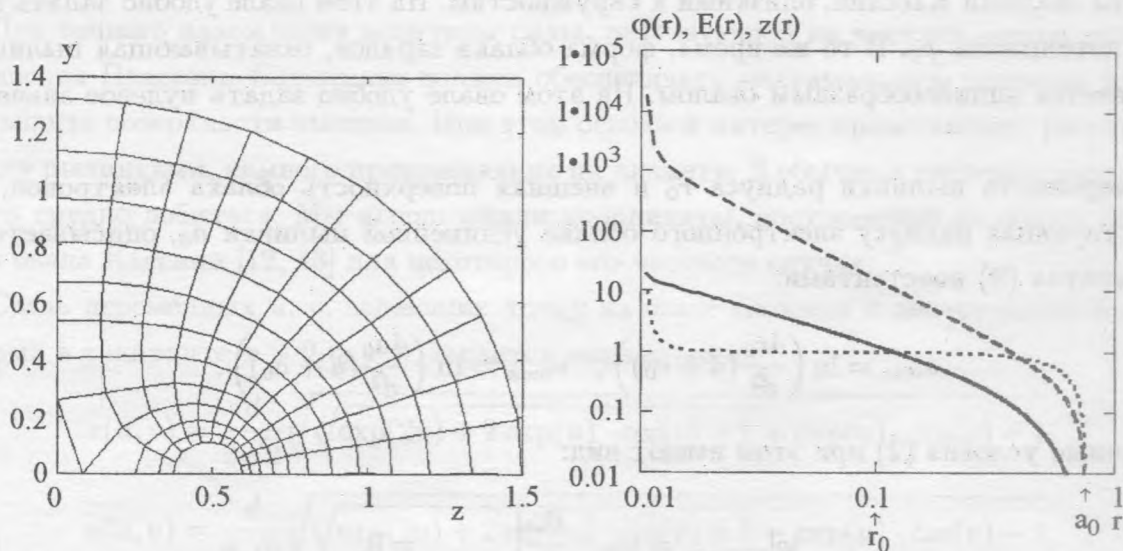


Рис. 1. Координаты Кассини для расстояния между фокусами  $d = 1$ , которое примерно соответствует смене притяжения отталкиванием.

Рис. 2. Зависимость потенциала  $\varphi(r)$  (сплошная линия), напряженности поля  $E(r)$  (штриховая линия) и заряда  $z(r) = 2\pi E(r)r^2$  (пунктир) от радиуса  $r$  для дебаевского атома. Расчет ориентирован на параметры плазмы экспериментов [1],  $a_0 = 0.755, r_0 = 0.1$ .

Затем с этими значениями  $\varphi_0, r_0, a_0$  решалась двуцентровая задача для  $d = 10a_0$ . Результаты решения для сферически симметричной и для двуцентровой задачи совпадали с высокой точностью. В дальнейшей серии расчетов переходили к меньшим значениям  $d$ . Основное внимание уделялось термоэмиссионной плазме, где  $\delta = 0$ .

Мы ориентировались на параметры плазмы работы [1] и положили  $a_0 = 0.755$ . Как показали расчеты, наиболее интересна область сравнительно больших расстояний  $d \sim 1$ . Полагая, что при  $d \sim r_0$  облако электронов вблизи поверхности пылинок поляризуется слабо и для удобства вычислений мы взяли радиус частицы  $r_0 = 0.1$ , в пять раз больше, чем в эксперименте. Соответственно, потенциал  $\varphi_0 = 1.16$ , взятый из решения одноцентральной задачи для  $r_0 = 0.1$ , оказался существенно меньше потенциала на поверхности пылинки малого радиуса.

Для определения зависимости силы взаимодействия пылинок от расстояния между ними  $d$  проводились серии расчетов с заданными значениями  $\varphi_0$ ,  $r_0$ ,  $a_0$ . При этом заряд частицы  $z_p$  также оказывается функцией  $d$ . Поэтому проводились дополнительные расчеты со значениями  $\varphi_0$  или  $a_0$  измененными таким образом, чтобы заряд частицы  $z_p$  не зависел от  $d$ .

Расчеты показали, что при малых расстояниях между частицами  $d \sim r_0$  имеет место отталкивание. Это не согласуется с результатами работ [4, 5], в которых при  $d \sim r_0$ , имело место притяжение. По-видимому, в численных расчетах [4, 5] имеется заметная погрешность вычисления производной потенциала вблизи поверхности пылинки. К этой погрешности очень чувствительна результирующая сила.

В наших расчетах смена притяжения отталкиванием происходит при  $\delta = 0$  на расстояниях  $d \approx 1.3$  (рис. 3), что примерно соответствует среднему расстоянию между пылинками  $2a_0 = 1.5$ . Положение точки  $d_0$ , в которой происходит смена знака силы, слабо зависит от того, какие величины ( $\varphi_0$ ,  $a_0$  или  $z_p$ ,  $a_0$ ) сохранялись при изменении  $d$ . Влияние изменения  $a_0$  (при постоянных значениях  $z_p$ ,  $\varphi_0$ ) на значение  $d_0$  несколько более существенно. В связи с тем, что при  $d \gg a_0$  задачу нельзя считать бинарной, мы приводим результаты расчетов лишь для сравнительно небольших значений  $d < 4$ .

При  $\delta = 1$  в рассмотренном диапазоне параметров притяжение пылинок резко ослабляется и становится практически незаметным. Это не согласуется с результатами [6], и возможно, связано с тем, что в работе [6] не учитывается поляризация зарядовых облаков.

Если представить себе ситуацию, когда оболочки дебаевских атомов не взаимодействуют друг с другом, то между пылинками будут иметь место только силы отталкивания. Действительно, для неполяризованных оболочек сила взаимодействия выражается в виде  $f(d) = z_{eff}(d)z_p/d^2$ . Здесь  $z_{eff}(d) = 4\pi E(d) \cdot d^2$  – суммарный заряд, находящийся внутри сферы радиуса  $d$  вокруг пылинки (некомпенсированная часть заряда пылинки). В силу квазинейтральности дебаевского атома  $z_{eff}(r) \geq 0$  при  $r > r_0$ . Заряды одного

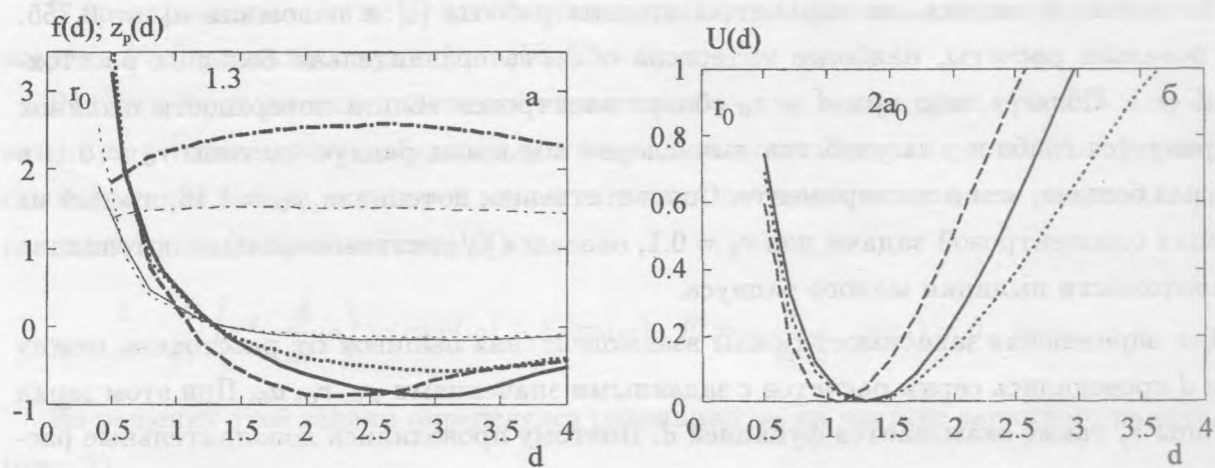


Рис. 3. Зависимость проекции силы на ось  $z$  (а) и потенциальной энергии (б) взаимодействия пылинок от расстояния между ними. Положительное значение силы соответствует отталкиванию пылинок, отрицательное – притяжению. Нормировка потенциальной энергии выбрана так, чтобы в минимуме энергии  $U(d)$  равнялась нулю. Жирные кривые  $\delta = 0$ ; тонкие кривые –  $\delta = 1$ . Сплошные кривые соответствуют постоянному потенциалу на поверхностях пылинок  $\varphi_0 = 1.16$ . Пунктирные кривые – постоянный заряд пылинки ( $z_p = 2$  для  $\delta = 0$ ;  $z_p = 1.35$  для  $\delta = 1$ ), обеспеченный подбором  $\varphi_0(d)$ . Штриховые кривые – постоянный заряд, обеспеченный подбором  $a_0$  – ( $d$ ) при  $\varphi_0 = 1.16$ . На рис. За штрих-пунктирные кривые дают зависимость заряда пылинки от расстояния для случая постоянного потенциала  $\varphi_0 = 1.16$ ,  $a_0 = 0.755$ .

знака отталкиваются:  $z_{eff}(d)z_p \geq 0$ .

Для того, чтобы преобладали силы притяжения, необходима перестройка (поляризация) зарядовых оболочек. При этом возрастает число зарядов, притягивающих пылинки на оси дебаевской молекулы. Итак, возникновение притяжения между пылинками связано с поляризацией электронных облаков и отходом от плоской геометрии [7].

Подведем итог. Во-первых, силы притяжения пылинок возникают на сравнительно большом расстоянии между пылинками, примерно равном среднему расстоянию между пылинками и дебаевскому радиусу, соответствующему плотности электронов на половине среднего расстояния между пылинками. Во-вторых, притяжение существенно, если заряды одного из знаков сосредоточены преимущественно на пылинках.

Ввиду того, что силы притяжения возникают на больших расстояниях, корректно решить задачу о формировании пылевых жидкостей и кристаллов можно лишь учиты-



вая многочастичное взаимодействие пылинок. Однако уже на основании представленных здесь результатов можно сделать два важных вывода о критериях проявления коллективных явлений: а) в случае термоэлектронной плазмы плотность электронов должна быть такой, чтобы дебаевский радиус примерно равнялся половине среднего расстояния между пылинками; б) в плазме газового разряда и в ядерно-возбуждаемой плазме свойства источника ионизации и плотность пылинок должны быть согласованы так, чтобы основной (обычно отрицательный) заряд несли пылинки.

Авторы признательны Ю. И. Сыцько за обсуждения вычислительных аспектов задачи.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Фортон В. Е., Нефедов А. П., Петров О. Ф. и др. ЖЭТФ, **111**, N 2, 467 (1997).
- [2] Фортон В. Е., Филинов В. С., Нефедов А. П. и др. ЖЭТФ, **111**, N 3, 889 (1997).
- [3] Фортон В. Е., Владимиров В. И., Депутатова Л. В. и др. ДАН, **336**, N 2, 184 (1999).
- [4] Яковленко С. И. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 9, 3 (1999).
- [5] Яковленко С. И. Письма в ЖТФ, **25**, N 16, 83 (1999).
- [6] Герасимов Д. Н., Синкевич О. А. Теплофизика высоких температур, **37**, N 6, 853 (1999).
- [7] Яковленко С. И. Письма в ЖТФ, **27**, N 9, 83 (2001).
- [8] Derjagin B., Landau L. Acta Physicochimica U.R.S.S., **XIV**, N 6, p. 633, 1941.
- [9] Яковленко С. И. Письма в ЖТФ, **26**, N 8, 47 (2000).
- [10] Ткачев А. Н., Яковленко С. И. ЖТФ, **69**, N 1, 53 (1999).
- [11] Ткачев А. Н., Яковленко С. И. Письма в ЖТФ, **25**, N 1, 52 (1999).
- [12] Математический энциклопедический словарь. Гл. ред. Ю. В. Прохоров. М., Научн. Изд. "Большая российская энциклопедия", 1995.
- [13] Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике, М., Наука, 1964.