УДК 539.17.01

ФАКТОРИАЛЬНЫЕ И КУМУЛЯНТНЫЕ МОМЕНТЫ В ПРОСТОЙ МОДЕЛИ КАСКАДА

А. В. Леонидов, Д. М. Островский

Рассмотрено поведение факториальных и кумулянтных моментов в простой модели каскада. Их характерные особенности оказываются подобными тем, что наблюдаются в КХД струях.

Характеристики распределений по множественности в многочастичных процессах в последнее время привлекают большое внимание благодаря КХД анализу производящего функционала этих распределений и его моментов. Очень ясный обзор по этому вопросу содержится в [1], где также можно найти и соответствующие ссылки, см. также недавний обзор [2]. Основным результатом вышеупомянутых исследований было, прежде всего, КХД предсказание колебательного поведения кумулянтных моментов как функции их номера. Фактически оказывается более удобным анализировать отношение кумулянтных и факториальных моментов. Экспериментальные данные о многих реакциях [2] подтвердили это предсказание. Ситуация кажется тем более интересной, что традиционно использовавшиеся распределения по множественности, вроде отрицательного биномиального распределения, не предсказывали таких колебаний. Однако последующий анализ [3] показывает, что другие феноменологические модели, такие как дуальная партонная модель [4] или модель кварк-глюонной струны [5] также объясняют эти данные. Это приводит нас к естественному вопросу: каково (основное) происхождение колебаний кумулянтных моментов? Чтобы ответить на этот вопрос, мы построим простой вероятностный каскад и рассмотрим свойства кумулянтов. Обнаруживается точно такая же картина колебаний, какая предсказывается теоретически и наблюдается экспериментально; таким образом подтверждается один из выводов [3], что основной источник этих колебаний – это каскадная природа, лежащая в основе процесса формирования частицы.

Рассмотрим модель каскада с дискретными шагами по времени. Вначале (в момент времени $t = 0$) мы имеем только одну "частицу". Когда время изменяется с t на $t+1$, каждая частица (которая существует в момент времени t) распадается с вероятностью p (это параметр модели) на 2 частицы или не распадается с вероятностью $1-p$.

Пусть $P_n(t)$ – вероятность того, что на шаге t возникло n частиц. Уравнение первого распада имеет вид

$$P_n(t) = (1-p)P_n(t-1) + p\sum_{n_1=0}^{n} P_{n_1}(t-1)P_{n-n_1}(t-1), \ P_n(0) = \delta_{n1}. \tag{1}$$

Теперь рассмотрим производящую функцию, связанную с вероятностями $P_n(t)$:

$$G(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)(1+z)^n.$$

Из (1) мы имеем

$$G(t,z) = (1-p)G(t-1,z) + pG^2(t-1,z). \tag{2}$$

Граничные условия для этого соотношения: 1. $G(t,0) = 1$ – формула полной вероятности; 2. $G(0,z) = 1+z$ – соответствует $P_n(0) = \delta_{n1}$.

По определению средняя множественность связана с производящей функцией выражением

$$n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(t) = \left.\frac{\partial G(t,z)}{\partial z}\right|_{z=0}.$$

Это дает для (2)

$$n(t) = (1-p)n(t-1) + 2pn(t-1) = (1+p)n(t-1) = (1+p)^t.$$

Последнее равенство следует из $G(t,0) = 1$ (см. выше) и $n(0) = 1$.

Факториальные моменты вводятся как коэффициенты $F_q(t)$ в разложении

$$G(t,z) = 1 + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{z^q}{q!}F_q(t)n^q(t). \tag{3}$$

После подстановки в (2) это уравнение дает

$$(1+p)^q F_q(t) = (1-p)F_q(t-1) + p\sum_{k=0}^{q} C_q^k F_k(t-1)F_{q-k}(t-1), \ q > 1. \tag{4}$$

Легко показать, что предел $\lim_{t\to\infty} F_q(t) = F_q$ существует. Поэтому (4) дает

$$F_q = \frac{1}{(1+p)^{q-1}-1}\frac{p}{1+p}\sum_{k=1}^{q-1} C_q^k F_k F_{q-k}, \ q > 1, \ F_1 = 1. \tag{5}$$

Теперь можно рассматривать асимптотические факториальные моменты как факториальные моменты "асимптотической" производящей функции.

$$G(a) = 1 + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{F_q}{q!} a^q.$$

Уравнение на $G(a)$ теперь имеет вид

$$G((1+p)a) = (1-p)G(a) + pG^2(a) \tag{6}$$

с условиями $G(0) = 1$ и $G'(0) = 1$.

Кумулянты вводятся как коэффициенты $K_q(t)$ в разложении

$$\ln G(t,z) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{z^q}{q!} K_q(t) n^q(t). \tag{7}$$

Кумулянтные и факториальные моменты фактически не независимы. Отношение между ними может быть прослежено из очевидной формулы $G_z (\ln G)'_z = G'_z$. Из (3) и (7) мы получаем

$$K_q = F_q - \sum_{k=1}^{q-1} C_{q-1}^k K_k F_{q-k}. \tag{8}$$

Удобно рассмотреть отношение $H_q = F_q / K_q$, получающееся из (5) и (8). Результаты для некоторых значений p показаны на рис. 1. Мы видим, что отношение кумулянтных к факториальным моментам H_q в нашей простой модели каскада дают ту же самую картину колебаний, какая получается из нескольких теоретических моделей и наблюдается экспериментально.

Перед изложением наших выводов полезно рассмотреть более внимательно два крайних предела нашей модели каскада.

1. $p \to 0$. Сохраняя ведущую степень по p в (6), мы получаем

$$paG'(a) = pG(a)(G(a) - 1).$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям,

$$G(a) = 1/(1-a),$$

так что $F_q^{(0)} = q!$, $K_q^{(0)} = (q-1)!$ и $H_q^{(0)} = 1/q$. Стоит отметить, что этот результат справедлив только для $pq << 1$ (а не для $p << 1$).

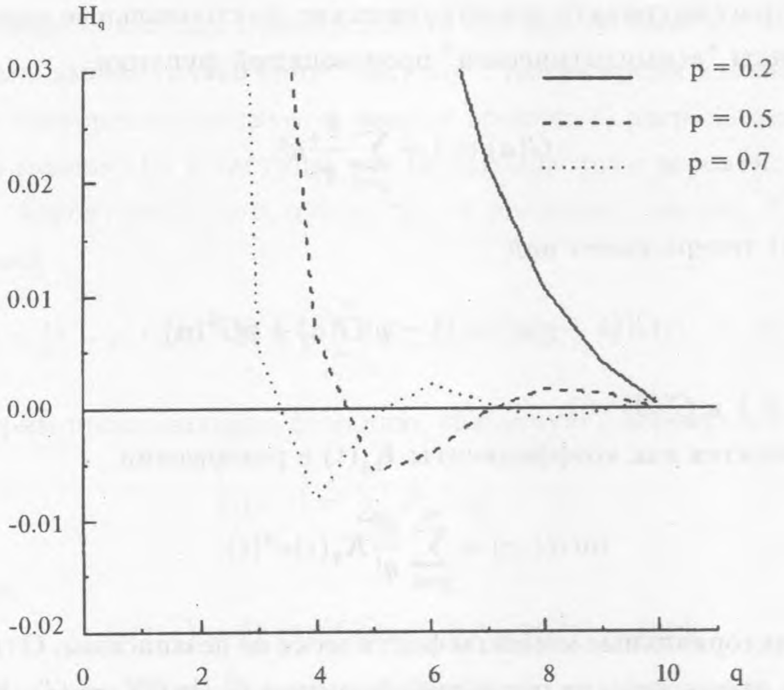

Рис. 1. *Отношение H_q кумулянтных (K_q) и факториальных (F_q) моментов для трех значений p (q – номер момента).*

2. $p = 1$. Хотя в контексте нашего рассмотрения этот предел выглядит весьма специфически, произведем явное вычисление, которое дает

$$G(2a) = G^2(a).$$

Очевидное решение этого уравнения

$$G(a) = e^a,$$

так что $F_q^{(1)} = 1$, $K_q^{(1)} = \delta_{q1}$ и $H_q^{(1)} = \delta_{q1}$. Такие моменты получаются из распределения Пуассона.

Из рассмотрения простой каскадной модели размножения частиц мы видим, что она правильно воспроизводит колебания, предсказанные некоторыми теоретическими схемами и наблюдаемые экспериментально. Отсюда делаем вывод, что основной источник таких колебаний – это каскадная структура, лежащая в основе динамической картины.

Работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 96-02-16210a).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Д р е м и н И. М. УФН, **164**, 785 (1994).

[2] D r e m i n I. M. Multiplicity Moments in QCD and Experiment, hep-ph/9604245, 1996.

[3] C a p e l l a A., D r e m i n I. M., N e c h i t a i l o V. A. and T r a n T h a n h V a n J. Moment Analysis of Multiplicity Distributions. hep-ph/9604247, 1996.

[4] C a p e l l a A., T r a n T h a n h V a n J. Z. Phys., **C23**, 165 (1984). C a p e l l a A. et al. Phys. Rev., **D35**, 2921 (1987).

[5] K a i d a l o v A. B. ЯФ, **45**, 1452 (1987).

Поступила в редакцию 20 ноября 1996 г.