

УДК 533.6.011

О ВЛИЯНИИ УСЛОВИЙ НА ГРАНИЦАХ НА РАЗВИТИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НА КОНТАКТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

И. Г. Лебо, В. В. Никишин¹, В. Б. Розанов, В. Ф. Тишкин¹

С помощью двумерной версии программы "НАТ" исследуется влияние граничных условий на развитие возмущения контактной границы при прохождении ударной волны на переходной стадии процесса. Показано, что на этой стадии "уединенное" возмущение разрушается медленнее, чем первоначально заданные синусоидальные возмущения.

Постановка задачи. При прохождении ударной волны через контактную поверхность развивается неустойчивость Рихтмайера – Мешкова [1, 2]. При этом первоначально малые возмущения нарастают, согласно формуле Рихтмайера, пропорционально начальной амплитуде возмущения после прохождения ударной волны a_0 , волновому числу $k = 2\pi/\lambda$, где λ – длина волны возмущения, и скорости потока за фронтом ударной волны U_0

$$\frac{da}{dt} = a_0 k \bar{A} U_0.$$

Здесь a – текущее значение амплитуды, $\bar{A} = (\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 + \rho_1)$ – число Атвуда для двух газов с плотностями ρ_1 и ρ_2 . Строго формула получена для случая импульсного ускорения контактной поверхности между двумя несжимаемыми жидкостями и ее практическое применение имеет ограниченный характер. Для исследования развития неустойчивости проводятся эксперименты на ударных трубах (см., например, [3]), а также используются сложные численные расчеты. В работе представлены результаты исследования влияния граничных условий на характер полученных численно решений.

¹Институт математического моделирования РАН.

выполненных с помощью программы "НАТ" (см. [4]). Результаты сравнивались с данными экспериментов, опубликованных в [3].

Программа "НАТ" численно решает систему уравнений бездиссипативной газовой динамики в эйлеровых декартовых координатах. В векторном виде эта система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{U})}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho(\epsilon + \mathbf{V}^2/2) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho u(\epsilon + \mathbf{V}^2/2) + pu \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho v(\epsilon + \mathbf{V}^2/2) + pv \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{U}) = \begin{Bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ \rho w(\epsilon + \mathbf{V}^2/2) + pw \end{Bmatrix}.$$

Система уравнений (1) дополнена уравнением состояния $p = (\gamma - 1)\rho\epsilon$. Здесь ρ – плотность, u, v, w – компоненты вектора скорости \mathbf{V} , ϵ – удельная энергия на единицу объема, p – давление, γ – постоянная адиабаты.

Выписанные выше уравнения решались численно с помощью явных разностных схем [5]. Ниже кратко опишем метод решения этих уравнений. Прямоугольная область в системе координат (X, Y, Z) разбивается сеткой

$$\omega_{\Delta} = \omega_{\Delta_x} \times \omega_{\Delta_y} \times \omega_{\Delta_z},$$

где

$$\omega_{\Delta_x} = \{\Delta_i, i = 1, \dots, N_x, \Delta_i = x_i - x_{i-1}, |\Delta_i| = h_x, h_x N_x = L_x\},$$

$$\omega_{\Delta_y} = \{\Delta_j, j = 1, \dots, N_y, \Delta_j = y_j - y_{j-1}, |\Delta_j| = h_y, h_y N_y = L_y\},$$

$$\omega_{\Delta_z} = \{\Delta_k, k = 1, \dots, N_z, \Delta_k = z_k - z_{k-1}, |\Delta_k| = h_k, h_k N_k = L_k\}.$$

Здесь $L_{x(yz)}$ – расстояния вдоль осей $\{X, Y, Z\}$. Все дискретные значения газодинамических функций взяты в центрах узлов. Для аппроксимации системы (1) использованы нелинейные консервативные разностные схемы повышенного порядка аппроксимации,

аналогичные тем, что были использованы в [6] для решения уравнений газовой динамики в двумерном случае.

$$\frac{U_{ijk}^{n+1} - U_{ijk}^n}{\tau} + \frac{F_{i+1/2jk} - F_{i-1/2jk}}{h_x} + \frac{G_{ij+1/2k} - G_{ij-1/2k}}{h_y} + \frac{H_{ijk+1/2} - H_{ijk-1/2}}{h_z} = 0,$$

где $F_{i+1/2jk}$, $G_{ij+1/2k}$, $H_{ijk+1/2}$ - дискретные газодинамические потоки, которые являются функциями двух переменных:

$$F_{i+1/2jk} = \Phi(U_{i+1/2jk}^l, U_{i+1/2jk}^r),$$

$$G_{ij+1/2k} = \Psi(U_{ij+1/2k}^l, U_{ij+1/2k}^r),$$

$$H_{ijk+1/2} = \Theta(U_{ijk+1/2}^l, U_{ijk+1/2}^r).$$

Здесь $U_{i+1/2jk}^l$ и $U_{i+1/2jk}^r$ - "левое" и "правое" значения вектора U на поверхности разностной ячейки, относительно которой рассчитывается поток $F_{i+1/2jk}$ (то есть поверхности между двумя ячейками с индексом " i " и " $i+1$ "). Соответственно $U_{ijk+1/2}^\alpha$ ($\alpha = r, l$) - "левые" и "правые" значения векторов на поверхностях между " j " и " $j+1$ " и " k " и " $k+1$ " ячейками.

Для того, чтобы найти значения вектора U на заданной поверхности между двумя ячейками, вводится новый вектор переменных $Y(U)$ ($Y = (\rho, p, u, v, w)$). Проводим интерполяцию этого вектора на поверхность между двумя ячейками, что позволяет повысить точность разностного решения. Чтобы повысить точность аппроксимации, предлагается следующая интерполяция:

$$Y_{i+1/2jk}^l = Y_{ijk} + \frac{h_x}{2} \alpha(R_{i+1/2}^-) \frac{Y_{i+1jk} - Y_{ijk}}{h_x}, \quad (2)$$

$$Y_{i+1/2jk}^r = Y_{i+1jk} - \frac{h_x}{2} \alpha(R_{i+1/2}^+) \frac{Y_{i+1jk} - Y_{ijk}}{h_x}. \quad (3)$$

Функция-лимитер $\alpha(R_{j+1/2})$ антидиффузионных потоков имеет вид

$$\begin{cases} \alpha(R_{i+1/2}^\pm) = 0, & \text{если } R_{i+1/2}^\pm \leq 0 \\ 0 \leq \alpha(R_{i+1/2}^\pm) \leq 2 \\ \alpha(1) = 1 \end{cases}$$

Компоненты указанной выше функции имеют вид

$$(R_{i+1/2}^-)^m = \frac{(Y_{ijk})^m - (Y_{i-1jk})^m}{(Y_{i+1jk})^m - (Y_{ijk})^m} \text{ и } (R_{i+1/2}^+)^m = \frac{(Y_{i+2jk})^m - (Y_{i+1jk})^m}{(Y_{i+1jk})^m - (Y_{ijk})^m}, \quad (m = 1, \dots, 5).$$

"Левые" и "правые" величины находятся по формулам, аналогичным (2) и (3). Таким образом, в программе "НАТ" используются разностные схемы, потоки которых рассчитываются с помощью решения задачи о распаде произвольного разрыва на границе между двумя ячейками. Для повышения порядка аппроксимации базовые "годуновские" потоки (см. [7]) подправляются описанными выше антидиффузионными составляющими.

$$\mathbf{F}_{i+1/2jk} = \Phi(\tilde{\mathbf{U}}_{i+1/2jk}), \mathbf{G}_{ij+1/2k} = \Psi(\tilde{\mathbf{U}}_{ij+1/2k}), \mathbf{H}_{ijk+1/2} = \Theta(\tilde{\mathbf{U}}_{ijk+1/2}),$$

где $\tilde{\mathbf{U}}_{i+1/2jk}$, $\tilde{\mathbf{U}}_{ij+1/2k}$ и $\tilde{\mathbf{U}}_{ijk+1/2}$ – решения задачи о распаде произвольного разрыва на границе между соответствующими ячейками.

В представленных расчетах использовался, как правило, "острый лимитер",

$$\alpha(R) = \begin{cases} 0, & R \leq 0 \\ 2R, & 0 \leq R \leq 0,4 \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}R, & 0,4 \leq R \leq 2 \\ 2, & R \geq 2 \end{cases}$$

Результаты численных расчетов. Были проведены расчеты развития неустойчивости контактной поверхности пары газов – аргон и ксенон. Параметры задачи соответствовали условиям экспериментов, описанных в [3] – до прихода ударной волны давление в обоих газах равнялось 0,5 атм, а число Атвуда $\bar{A} = 0,54$. Ударная волна имела скорость в 3,5 раза превосходящую скорость звука (число Маха $M = 3,5$). Задача решалась в двумерной области (x, z) . Полагалось, что система координат смещается с постоянной скоростью $W_{0z} = 553,2$ м/с вдоль оси OZ , что позволило проводить расчеты при временах до 600 мкс в области $0 < z < 12$ см на сетках, имевших умеренное число узлов (от 250 до 1000 узлов вдоль OZ и от 20 до 80 узлов по направлению Ox), так как система координат смещалась вместе с контактной границей. Расчеты, выполненные на различных сетках, продемонстрировали быструю сходимость приближенных решений (см. [8]). Были проведены две серии расчетов – в первой серии предполагалось, что контактная поверхность возмущена по синусоидальному закону. Возмущение контактной границы задавалось формулой

$$Z_c = Z_{c0} + a_0^z \cos(kx), \quad 0 < x < \lambda/2,$$

и расчет проводился в области с поперечным размером, равным половине длины волны возмущения. На границах $x = 0$ и $x = \lambda/2$ задавались условия абсолютно упругой стенки (тангенциальная компонента скорости $U_x = 0$), на границе $z = 0$ – условие

$\partial W_z / \partial z = 0$. Ударная волна падала в направлении, противоположном направлению оси OZ . Вторая серия расчетов соответствовала "уединенному возмущению", когда расчет проводился в области с поперечным размером $0 < x < 0,75\lambda$ и $0 < x < 1,5\lambda$.

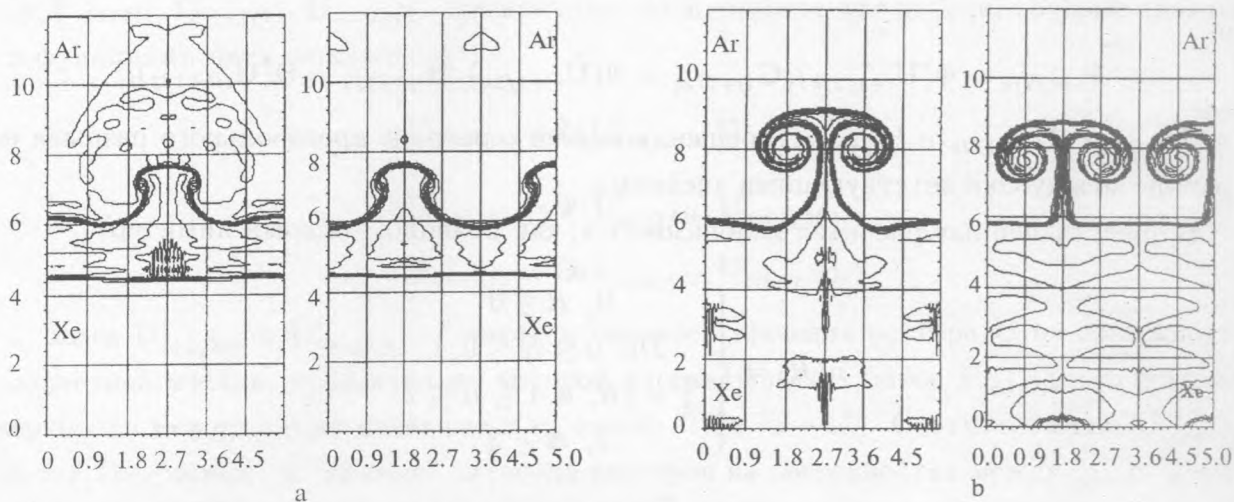


Рис. 1. Изолинии плотности вблизи контактной границы двух газов (аргон – ксенон) в моменты времени 100 мкс (а) и 400 мкс (б). Слева – уединенное возмущение, справа – синусоидальное. По осям – расстояния в см.

На рис. 1 показаны изолинии плотности в окрестностях контактной границы в моменты времени 100 и 200 мкс для случаев "уединенного" и "синусоидального" возмущений. Начальная полная амплитуда возмущения равнялась 1 см (полная амплитуда – расстояние от пика до основания возмущения и в дальнейшем ее будем обозначать A), а длина волны – 3,6 см.

На рис. 2 показан рост полных амплитуд этих возмущений. Точками показаны результаты экспериментов [3]. Видно, что при $A(t)k < 4,5$ (если под амплитудой понимать половину расстояния от пика до основания, тогда это значение будет равняться 2,2 – 2,3) граничные условия не влияют на развитие "грибообразной структуры", затем синусоидальное возмущение начинает разрушаться быстрее и амплитуда его растет медленнее, чем в случае "уединенного" возмущения. Аналогичная картина наблюдается для случаев $\lambda = 2,4$ и 1,2 см.

На рис. 3 показаны формы первоначально синусоидальных возмущений с длинами волн $\lambda = 3,6$ см, 2,4 см и, соответственно, $a_0 = 0,75, 0,5$ см в моменты времени $t = 200$

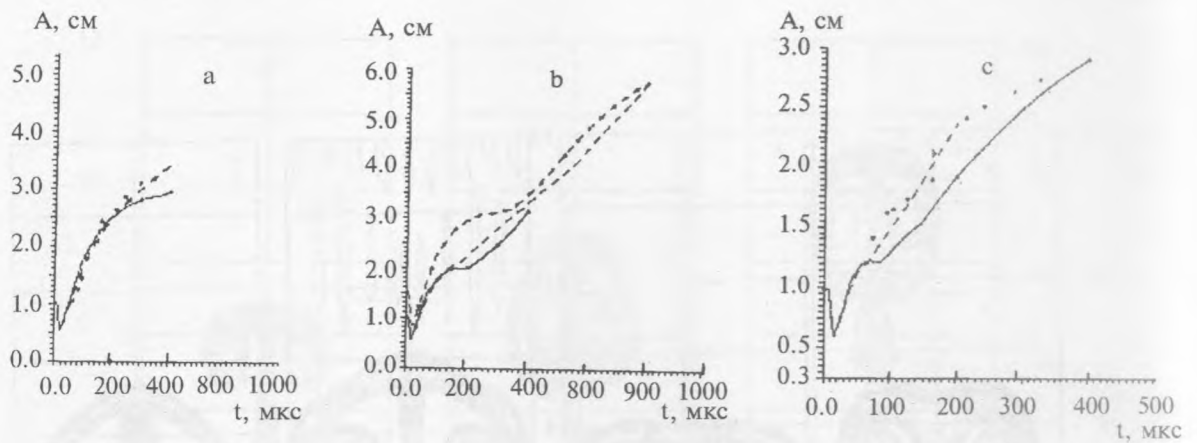


Рис. 2. Зависимости роста амплитуд возмущений контактных границ от времени. а) Начальная длина волны возмущения $\lambda = 3,6$ см, начальная полная амплитуда $A_0 = 1$ см. Сплошная линия - синусоидальное возмущение, пунктирная - "уединенное возмущение", точками показаны результаты экспериментов. б) Синусоидальные возмущения с $A_0 = 1,5$ см и $\lambda = 3,6$ см (штриховая линия с "маркерами"), $A_0 = 1$ см и $\lambda = 2,4$ см (сплошная линия без маркеров) и "уединенное" возмущение с $A_0 = 1$ см, $\lambda = 2,4$ см (штриховая линия). в) Длина волны $\lambda = 1,2$ см, $A_0 = 1$ см. Сплошная линия - синусоидальное возмущение, штриховая - уединенное.

и 400 мкс. Сравнивалось развитие возмущений с одинаковой кривизной поверхности ($a_0k = \text{const}$).

На рис. 4 приведены изолинии плотности вблизи контактной поверхности для случая "уединенного" возмущения с $\lambda = 2,4$ см и $a_0 = 0,5$ см, когда правая стенка удалена на полдлины волны. На рис. 1в показан рост амплитуд возмущений для указанных случаев. Видно, что синусоидальное и "уединенное" возмущения растут одинаково приблизительно до 150 - 200 мкс. В этот момент "шляпки" двух соседних синусоидальных возмущений начинают соприкасаться (на рис. 3 видно, что "шляпки" достигли боковой границы счетной области). Абсолютно упругая стенка (либо плоскость симметрии в нашей задаче) не позволяет взаимодействовать двум соседним возмущениям. Происходит замедление роста возмущения и изменение его формы (см. рис. 3). "Уединенное возмущение" продолжает расти, как видно на рис. 4. В случае коротких длин волн и синусоидальных возмущений при $Ak > 6$ наблюдается период замедленного роста "гриба" и формирования нового образования.

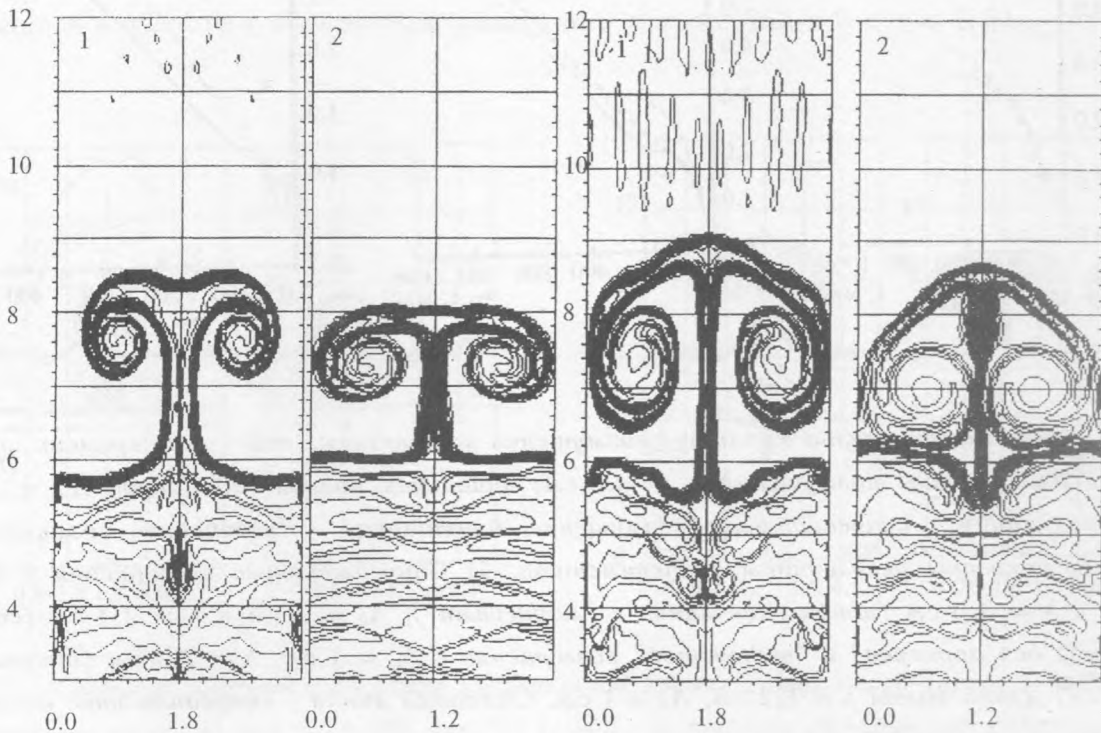


Рис. 3. Изолинии плотности вблизи контактных границ тех же газов. 1) $\lambda = 3,6$ см, $A_0 = 1,5$ см, 2) $\lambda = 2,4$ см, $A_0 = 1$ см в моменты времени 200 мкс (слева) и 400 мкс (справа). Начальная кривизна $A_0 k$ одинакова.

На рис. 5 показаны результаты расчетов возмущений для длины волны 1,2 см и начальной амплитуды 0,5 см (полная амплитуда – 1 см). К этому моменту, как видно из рисунка 5а ($t \approx 75-80$ мкс для случая $\lambda = 1,2$ см), "шляпка" расширилась вплоть до боковой стенки (или плоскости симметрии) и рост этого "гриба" приостановился. Затем происходит удвоение волнового числа и начинается рост нового более коротковолнового возмущения. Математическая постановка задачи позволяет реализоваться только тем длинам волн возмущений, которые кратны длине 1,2 см. В экспериментах (см. [3], рис. 1) видно, что к моменту $t \approx 50-70$ мкс происходит "перехлест" и слияние шляпок, после чего происходит рост области перемешивания. На рис. 2 с штриховой линией показан рост амплитуды возмущения "уединенного гриба", причем он нарастает до больших амплитуд, чем в случае синусоидальных возмущений.

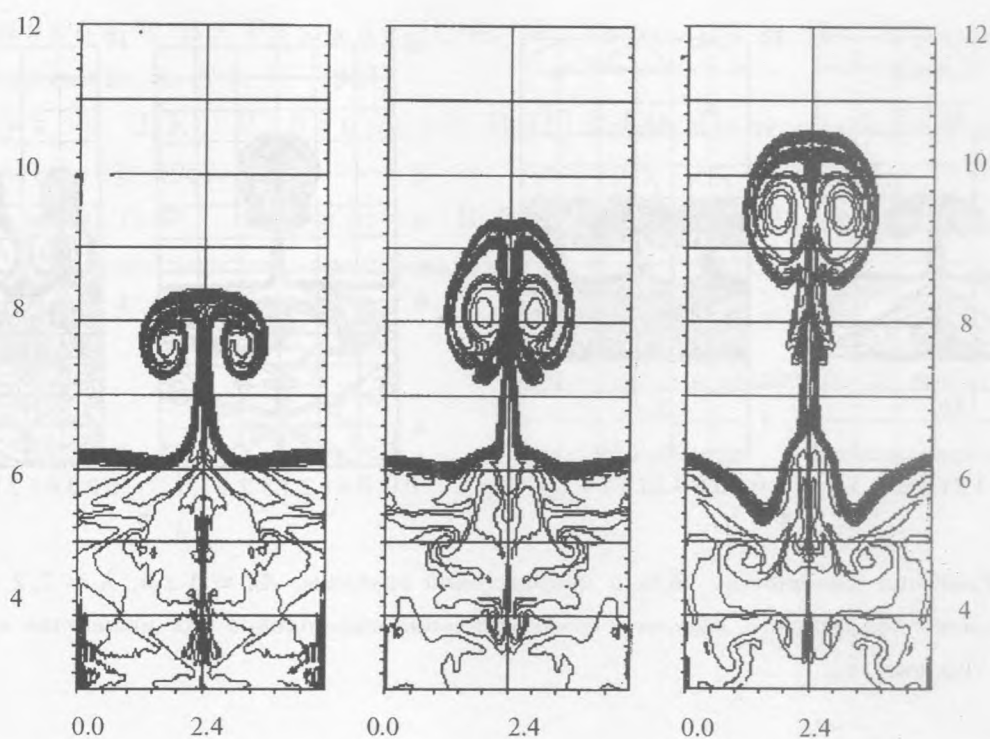


Рис. 4. Изолинии плотности вблизи контактной границы Ar-Xe для "уединенного возмущения" с "длиной волны" $\lambda = 2,4$ см и начальной полной амплитудой $A_0 = 1$ см для моментов времени 200, 400 и 700 мкс (слева направо):

Обсуждение результатов. В настоящий момент преждевременно утверждать о полном согласии экспериментальных и расчетных данных на переходной (от развития отдельных возмущений до образования и развития зоны турбулентного перемешивания) стадии процесса, так как в натурном эксперименте присутствует целый спектр первоначально малых возмущений, укладывающихся на поперечном сечении ударной трубы $7,2 \times 7,2$ см, и которые проявляются, по нашему мнению, на переходной стадии процесса. В расчете, на переходной стадии могут проявиться только те возмущения, чьи длины волн кратны размеру области счета (что мы и наблюдаем на рис. 5). Ограниченность ресурсов современных компьютеров не позволяет моделировать развитие широкого спектра возмущений, тем не менее, представленные результаты демонстрируют возможность промоделировать с помощью ЭВМ переход от эволюционной стадии развития одной гармонике возмущения к формированию зоны перемешивания.

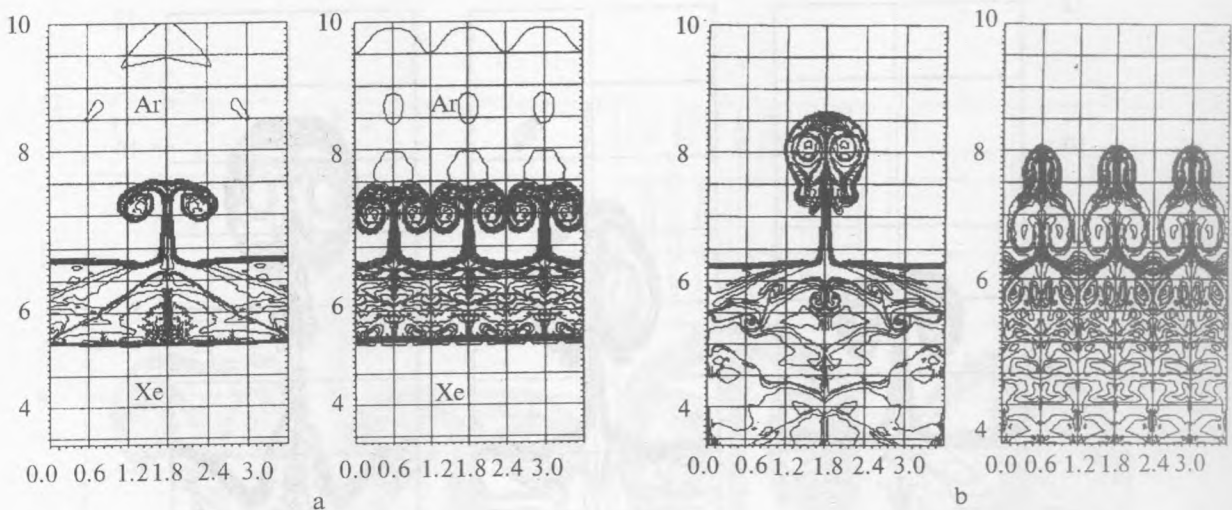


Рис. 5. Изолинии плотности вблизи контактной границы, $A_0 = 1$ см, $\lambda = 1,2$ см. Слева – "уединенное" возмущение, справа – синусоидальное возмущение для моментов времени 75 мкс (а) и 200 мкс (б).

В заключение авторы благодарят А. Н. Алешина за плодотворную дискуссию.

Работа выполнена при поддержке Международного научно-технического фонда (грант МНТЦ N029-94) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ 96-01-01295).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Richtmyer R. D. *Communs. Pure and Appl. Math.*, **13**, N 2, 297 (1960).
- [2] Мешков Е. Е. и др. *Известия АН СССР, Механика жидкости и газа*, **5**, 151 (1969).
- [3] Алешин А. Н., Лазарева Е. В., Зайцев С. Г. и др. *ДАН СССР*, **310**, N 5, 1105 (1990).
- [4] Tishkin V. F., Nikishin V. V., et al. *Conf. on Laser Interact. with Matter, Oxford, 1994. Inst. Phys. Conf. Ser. No 140, Sect. 3, Conf. on Laser Interact. with Matter. Oxford, 1994.*
- [5] Самарский А. А. *Введение в теорию разностных схем. Наука, М., 1971.*

- [6] Вязников К. В., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П. Математическое моделирование, **1**, N 5, 95 (1989).
- [7] Годунов С. К., Рябенский В. С. Введение в теорию разностных схем. Физматгиз, М., 1962.
- [8] Тишкин В. Ф., Никишин В. В., Попов И. В., Фаворский А. П. Математическое моделирование, **7**, N 5, 15 (1995).

Поступила в редакцию 26 ноября 1996 г.