УДК 534.05179

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ПЕРЕМЕШИВАЮЩЕГО СЛОЯ МЕТОДОМ ТОЧЕЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А. Г. Колупаев, Д. С. Чернавский

Обсуждаются свойства перемешивающего слоя в динамических системах и его роль при генерации информации и эволюции ее ценности. Эти явления играют важную роль при биологической эволюции, принятии решения и творчестве. Исследование проводится на примере математической модели типа кубического отображения. Показано, что в момент генерации информация имеет нулевую ценность, но затем ее ценность возрастает. Предложен критерий эффективности и определен оптимальный момент принятия решения.

Явление "перемешивающий слой" играет важную роль в ряде актуальных проблем информатики и биофизики [1].

В науке об информации (информатике) сейчас актуальна проблема генерации информации и эволюции ее ценности.

Напомним: под генерацией информации понимается случайный выбор одного из возможных вариантов и запоминание его. Под рецепцией информации понимается выбор, продиктованный извне. Ценность информации, согласно Бонгарту и Харкевичу [2, 3], равна: $V = \log_2(P_{out}/P_{in})$, где P_{out} и P_{in} – вероятности достижения цели соответственно после получения (генерации или рецепции) информации и до этого.

Ясно, что в системе, способной генерировать информацию, должен иметь место хаотический режим (для того, чтобы выбор был случайным), который затем сменяется динамическим (для запоминания), то есть должен быть перемешивающий слой.

В биофизике генерация ценной информации происходила (и происходит) в течение эволюции (начиная с возникновения жизни) и в нервной системе высших существ.

Отсюда ясна актуальность исследования свойств перемешивающего слоя.

Перемешивающий слой определяется как область фазового пространства, обладающая следующими свойствами:

(1) Все траектории, выходящие из заданной области начальных условий, попадают в перемешивающий слой;

(2) Внутри перемешивающего слоя поведение траекторий хаотично, то есть энтропия Колмогорова [4] достаточно велика, система глобально неустойчива и временной горизонт прогнозирования мал.

(3) Все траектории, попавшие в перемешивающий слой, выходят из него и попадают в динамический мультистационарный слой, в котором существуют, по меньшей мере, два устойчивых стационарных состояния.

От странного аттрактора перемешивающий слой отличается свойством (3).

В системах с перемешивающим слоем можно ввести два понятия: временной и пространственный горизонт прогнозирования. Временной горизонт прогнозирования широко используется в стохастических процессах. Временной горизонт прогнозирования представляет собой интервал времени Δt, в течение которого можно с вероятностью, близкой к единице, предсказать состояние системы в момент времени $t + \Delta t$, если оно известно в момент t. По порядку величины $\Delta t = 1/\lambda$, где λ – число Ляпунова, характеризующее неустойчивость системы. Временной горизонт прогнозирования является временем запоминания, если он мал по сравнению со временем процесса. Пространственный горизонт прогнозирования δx имеет смысл только в перемешивающем слое; величина δx – интервал начальных условий, которые приводят (с высокой вероятностью) к одному и тому же конечному состоянию.

Если перемешивающий слой достаточно велик и энтропия Колмогорова в нем достаточно велика, то пространственный горизонт прогнозирования очень мал[1].

Отсюда следует, что зная начальные условия с точностью Δx (такой, что $\Delta x \gg \delta x$), практически невозможно предсказать, в какое именно конечное состояние попадает система.

Простейший пример системы с перемешивающим слоем – китайский биллиард (рис. 1). Он представляет собой шарик, движущийся по наклонной плоскости, усеянной штырьками и имеющей две лунки ("красная" и "черная"). Движение шарика описывается законами Ньютона с учетом трения. Вначале (до первого соударения со

[1] Формально перемешивающий слой можно считать динамической системой со сложной структурой фазового пространства.

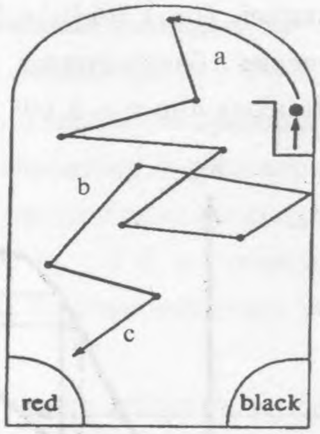

Рис. 1. *Схема китайского биллиарда; a – входной динамический режим, b – перемешивающий слой, c – выходной динамический режим.*

штырьком) поведение шарика динамично (входной динамический слой). В середине, когда шарик отражается от штырьков (которые играют роль выпуклой отражающей стенки в биллиарде Синая), движение шарика хаотично – это и есть перемешивающий слой. В конце, когда движение шарика замедляется, он попадает в область притяжения одной из лунок и скатывается в нее. В этой области поведение шарика динамично и предсказуемо (выходной динамический слой).

Математическая модель китайского биллиарда (так же как и биллиарда Синая) содержит четыре динамических переменных (две координаты и две скорости). Она может быть представлена в форме системы из четырех уравнений, исследование которой достаточно сложно.

Более простая модель, обладающая теми же свойствами, – это одномерное кубической отображение

$$x_{n+1} = \nu(n)x_n(1 - x_n^2),$$
$$\nu(n) = \nu_0 e^{-\gamma n};\ \gamma \ll 1;\ \nu_0 > v_{cr} \approx 2,598, \qquad (1)$$
$$n_{max} = \gamma^{-1}\ln\nu_0.$$

Поведение отображения (1) при постоянном значении параметра ν исследовалось в работах [5]. Удобным методом исследования одномерных отображений является диаграмма

Ламерея. Начальное значение x_0 задается на оси x_n, затем восстанавливается перпендикуляр до пересечения с функцией $f(x_n) = \nu(n)x_n(1 - x_n^2)$, проводится линия, параллельная оси абсцисс, до пересечения с биссектрисой, и далее процедура повторяется. На рис. 2 приведена диаграмма Ламерея при $\nu = 2,698 > \nu_{cr}$.

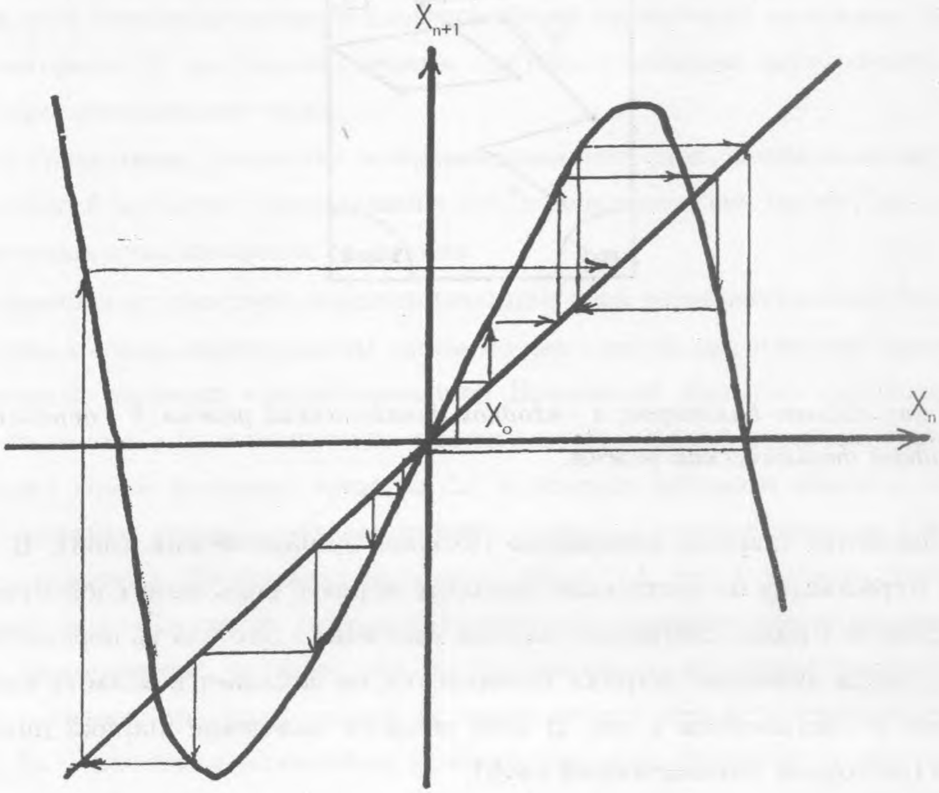

Рис. 2. *Диаграмма Ламерея отображения (1) при $\nu > 2,598$.*

В модели (1) имеют место следующие бифуркации. При $\nu < 1$ в нуле имеется единственное устойчивое стационарное состояние. При $1 < \nu < 2$ существуют два устойчивых стационарных состояния – одно в положительном квадранте и другое в отрицательном. Конечный результат определяется начальными условиями. При $2 < \nu < \nu_{cr}$ имеет место хаотический режим, но точка остается в одном и том же квадранте, то есть выбор квадранта также предопределен. При $\nu > \nu_{cr} = 2,598$ тоже имеет место хаотический режим, в котором точка перескакивает из одного квадранта в другой при любых начальных условиях. При $\nu > 3$ величина x_n неограниченно возрастает с увеличением n.

В модели (1), благодаря зависимости $\nu = \nu(n)$, система с течением времени проходит все бифуркации, за исключением последней ($\nu = 1$). Перемешивающему слою соответствует интервал значений параметра $\nu_0: \ 3 > \nu_0 > \nu_{cr}$.

Исследование пространственного горизонта прогнозирования δx проводилось в среде Obasic. Значение δx, при котором вероятность достоверного прогноза выше 0,5, зависит от параметра ν_0 и уменьшается с увеличением последнего (рис. 3). Видно, что имеется достаточно узкий интервал $2,68 < \nu_0 < 2,8$, в котором эта зависимость имеет резкий характер. При $\nu_0 > 2,68$ величина δx уменьшается с ростом ν_0, но не так резко. При $\nu_0 < 2,68$ величина $\delta x \approx 1$.

Интерпретировать эти результаты удобнее всего на примере игры типа рулетки. Пусть некто, игрок, выбирает одно из возможных конечных состояний (делает ставку, для определенности, в положительный квадрант). Сделанный игроком выбор запоминается до окончания игры (иначе выигрыш не получишь), и потому является макроинформацией. Количество ее в нашем случае невелико, $I_{gen} = \log_2 2 = 1$ *бит*.

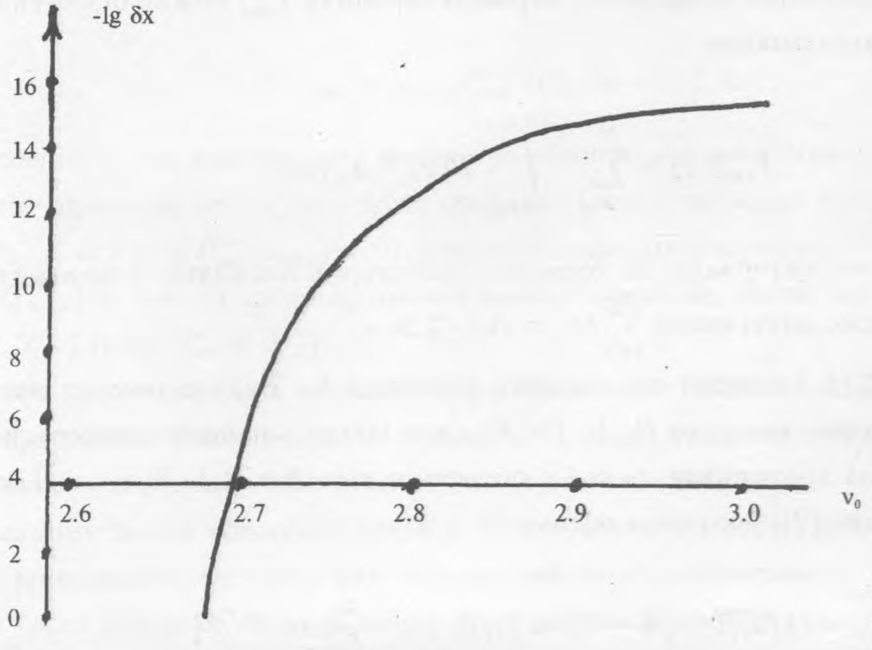

Рис. 3. *Зависимость пространственного горизонта прогнозирования δx от параметра ν_0 при значении параметра $\gamma = 10^{-3}$. Интервал $2,68 < \nu_0 < 2,8$ соответствует выходу из перемешивающего слоя.*

Пусть некто другой, крупье, знает расположение интервалов δx_j^+ и δx_j^-, приводящих к положительному и отрицательному квадрантам, и может фиксировать положение точки x_n с точностью Δx в любой момент времени $t_0, t_1, ..., t_n, ..., t_{max}$. Последнее означает, что наблюдаемая (рецептируемая) координата x_n отличается от истинного значения x'_n; распределение величин $x_n - x'_n$ нормально, и вероятность застать данное значение $x_n - x'_n$ равна:

$$P(x_n - x'_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(x_n - x'_n)^2/2\sigma}; \ \sigma = \Delta x^2.$$

Информация о координатах рецептируется (не генерируется) и сохраняется в течение времени Δt. В начале процесса, когда Δt мало ($\Delta t \ll T$, где T – полное время процесса), фиксация координаты является микроинформацией, в конце процесса $\Delta t \sim T$, и она должна рассматриваться как макроинформация. Количество рецептируемой информации равно $I_{rec} = -\log_2(\Delta x/\Delta X) \gg 1$, где ΔX – весь интервал возможных значений координаты ($\Delta X = 2$).

Вероятность реализации выбранного игроком варианта P^+_{out} можно оценить на основе рецептируемой информации

$$P^+_{rec}(t_n) = \sum_j^N \int\limits_{x_j - 0,5\delta x_j}^{x_j + 0,5\delta x_j} P(x_n - x'_n) dx'_n, \qquad (2)$$

где x_j – середина j-го интервала, из которого траектории попадают в положительный квадрант. Сумма всех интервалов $\sum\limits_{j+1}^{N} \delta x_j = \Delta X/2 \gg \sigma$.

Вероятность $P^+_{rec}(t_n)$ зависит от момента рецепции t_n. Если в момент времени t_n зафиксирована координата x_n, то $P_{rec}(t_n) = P_{out}(t_n)$. Пусть в начале процесса, в момент $t_0 = 0$ зафиксирована координата $x_0 \approx 1$ с погрешностью $\Delta x \ll 1$. При $t = 0$ величина $\Delta x \gg \delta x$ и, используя (2), получаем оценку

$$P_{out}(0) = (1/2)[1 \pm (\Phi - 1)] \approx (1/2)[1 \pm \frac{x_n}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-x_n^2/2\sigma}] \approx 1/2,$$

где $\sigma = (\Delta x)^2$ (так что $x_0^2/2\sigma \gg 1$) и Φ – интеграл ошибок.

Ценность информации в момент t_0 равна: $V^+(t_0) = \log_2(P_{out}/P_i n) = 0$ с точностью до членов $O(e^{-x_0^2/2\sigma})$ (здесь, как упомянуто, принято $P_{in} = 1/2$). Такова же ценность и рецептируемой информации.

В момент времени t_n, когда параметр $\nu(n)$ приближается к значению $\nu(n) = \nu_{cr}$ и величина $\delta x \gg \Delta x$, в выражении (2) значимы только несколько членов, в которых $(x_n - x_n) \sim \Delta x$.

Если значение x_n попадает в один из интервалов δx_j^+, ведущих к положительному квадранту, то

$$P_{out}^+ = 1 - [2\sigma/(\delta x)^2]\exp[-(\delta x)^2/8\sigma]. \tag{3}$$

При $\delta x_j^+ \gg \sigma$ вероятность $P_{out}^+(t_n) \approx 1$, то есть велика. Если же x_n попадает в один из интервалов, ведущих к отрицательному квадранту, то, напротив, велика вероятность $P_{out}^-(t_n)$, а величина $P_{out}^+(t_n) = 1 - P_{out}^-(t_n)$ экспоненциально мала. В первом случае ценность генерированной информации равна

$$V^+(t_n) = \log_2\left(\frac{P_{out}^+(t_n)}{P_{in}}\right) \approx V_{max} = 1\,\text{бит}.$$

Во втором случае

$$V^+(t_n) = \log_2(P_{out}^{+,2}/P_{in}) \approx -\delta x_j^+/4\sigma.$$

То есть ценность отрицательна и велика по абсолютной величине.

В конце процесса, когда результат очевиден (рецептируемая информация однозначна: $P_{out}^+(t_{max}) = 1$ или $P_{out}^+(t_{max}) = 0$), ценность информации равна: $V^+(t_{max}) = V_{max} = 1$, либо $V^+(t_{max}) = -\infty$. В промежуточный момент времени, когда $\Delta x \sim \delta x$, вероятность $P_{out}^+ \in (0,5,\ 1)$ (или $P_{out}^+ > 0,5$).

Из этого примера видно, что ценность информации меняется со временем. В начале любая информация имеет нулевую ценность. В конце процесса она либо возрастает до максимального значения, либо становится отрицательной.

Рассмотрим более сложный пример. Пусть игрок способен рецептировать информацию о координате, то есть, фактически, оценивать вероятность $P_{rec}(t_n)$, и, основываясь на своих оценках, делать выбор (генерировать информацию) в промежуточные моменты, до того, как крупье произнесет слова "игра окончена". При этом рецептируется микро-, а генерируется макроинформация. Кроме того происходит свертка информации, поскольку количество первой больше чем второй. Эта ситуация моделирует процесс принятия решения в условиях неопределенности, иначе говоря – процесс творчества. Возникают вопросы: каково количество новой информации, какова ее ценность в момент генерации, какова ценность рецептируемой информации и каков критерий эффективности творчества?

Количество генерируемой в момент времени t_n информации равно:

$$I_{gen}(t_n) = -\sum_i^n P_i(t_n)\log_2 P_i(t_n), \tag{4}$$

где n – число возможных конечных состояний (в нашем случае $n = 2$), P_i – вероятность реализации информации до того, как сделан выбор, но после рецепции информации, то есть $P_1 = P_{rec}^+(t_n)$; $P_2 = P_{rec}^-(t_n) = 1 - P_{rec}^+$. В начале процесса, при $t = 0$, $P_{rec}^+ = P_{rec}^- = 0,5$ и количество информации $I_{gen}(t_0) = 1$ *бит*, то есть максимально. В конце процесса, при $t = t_{max}$, возможны следующие варианты: либо $P_{rec}^+(t_{max}) = 1$, либо $P_{rec}^-(t_{max}) = 1$. В обоих случаях $I_{gen}(t_{max}) = 0$. В любой промежуточный момент t_n либо $0,5 < P_{rec}^+ < 1$, либо $0,5 < P_{rec}^- < 1$. Естественно, выбирается тот вариант, при котором $P_{rec} > 0,5$. Для определенности примем $P_{rec}^+ > 0,5$. В этом случае ценность выбора равна: $V_{gen}^+(t_n) = \log_2(P_{out}(t_n)/P_{in}(t_n))$. Однако в данном случае $P_{in}(t_n) \neq 0,5$, поскольку выбор сделан после рецепции информации, то есть $P_{in}^+(t_n) = P_{rec}^+(t_n)$. Она может быть вычислена по формуле (2). Величина $P_{out}(t_n)$, как и в предыдущем случае, вычисляется на основе рецептируемой информации и тоже равна $P_{out}^+(t_n) = P_{rec}^+(t_n)$. Отсюда: $V_{gen}^+(t_n) = 0$.

С течением времени ценность информации $V_{gen}^+(t_n)$ может либо увеличиваться, либо уменьшаться независимо от "игрока". Ценность рецептируемой информации $V_{rec}(t_n)$ приобретает смысл только после того, как игрок сделал выбор и тем сформулировал цель. Тогда она равна:

$$V_{rec}(t_n) = \log_2(P_{rec}(t_n)/0,5). \tag{5}$$

При $t = t_0$ $P_{rec}(t_0) = 0,5$ и $V_{rec}(t_0) = 0$; при $t = t_{max}$ $P_{rec}(t_{max}) = 1$ и $V_{rec}(t_{max}) = V_{max} = 1$.

Оценка эффективности "принятия решения" зависит от двух факторов: способности оценивать вероятность $P_{rec}(t_n)$ и, следовательно, $V_{rec}(t_n)$ и количества генерируемой информации $I_{gen}(t_n)$.

Из изложенного следует, что величины $V_{rec}(t_n)$ и $I_{gen}(t_n)$ ведут себя антибатно. В начале количество генерируемой информации максимально, $I_{gen}(t_0) = 1$, но ее ценность, равно как и $V_{rec}(t_0)$, равна нулю. Принятие решения в этот момент неэффективно. В конце, когда $t = t_{max}$, $V_{rec}(t_{max}) = 1$, но $I_{gen}(t_{max}) = 0$. В этом случае принятие решения тривиально. В игре такая ситуация исключается, поскольку крупье произнесет "игра окончена" до этого момента. В качестве критерия эффективности решения можно выбрать величину

$$C = V_{rec}(t_n) I_{gen}(t_n), \tag{6}$$

$C(t_0) = C(t_{max}) = 0$. Величина $C(t_n)$ является функцией $P_{rec}(t_n)$. Используя выражения (6), (5) и (4), можно найти ее максимум и соответствующее значение $P_{rec}(t_n)$. Последнее равно $P_{rec}(t_n) \approx 0,75$ и при этом $C_{max} \approx 0,5$. Согласно (3), вероятность порядка 0,75 означает, что горизонт прогнозирования $\delta x \sim \Delta x$, то есть система близка к выходу из перемешивающего слоя.

Таким образом, модель позволяет определить оптимальный момент принятия решения.

Из изложенного видно, какую роль играет перемешивающий слой в процессах генерации информации, эволюции ее ценности и творчестве.

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность профессору Г. Ю. Ризниченко за плодотворные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Чернавский Д. С. Синергетика и информация. М., Знание, 1990.

[2] Бонгарт М. М. Проблема узнавания. М., Наука, 1967.

[3] Харкевич А. А. Теория информации. Опознавание образов. М., Наука, 1973.

[4] Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С. Введение в синергетику. М., Наука, 1990.

Поступила в редакцию 27 января 1997 г.