

УДК 621.373.826

АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ТРЕХТЕМПЕРАТУРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

И. Г. Лебо

Получено автомодельное решение для системы уравнений теплопереноса в трехтемпературном приближении. Это решение использовалось для тестирования двумерной программы расчета уравнений радиационной газовой динамики.

Для описания теплопереноса в плотной плазме (например, в мишенях, облучаемых мощными лазерными либо корпускулярными потоками) часто используется трехтемпературная модель [1, 2]. В этом случае наряду с температурами электронов и ионов вводится "температура квантов". Ниже дано краткое описание этой модели. Пренебрегая рассеянием фотонов, уравнение переноса излучения можно записать в виде

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \vec{\Omega} \text{grad} I_\nu = \chi_\nu (I_{\nu p} - I_\nu), \quad I_{\nu p} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \quad (1)$$

Здесь $I_{\nu p}$, I_ν – равновесное планковское и неравновесное значения спектральной интенсивности излучения, χ_ν – коэффициент поглощения излучения на частоте ν с учетом вынужденного испускания, Ω – телесный угол.

Проинтегрировав первое уравнение в (1) по полному телесному углу 4π , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\nu}{\partial t} + \text{div} \vec{S}_\nu &= c\chi_\nu (U_{\nu p} - U_\nu), \\ U_\nu &= \int_{4\pi} I_\nu d\vec{\Omega}/c, \quad U_{\nu p} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3 (\exp(h\nu/kT) - 1)}, \\ S_\nu &= \int I_\nu \vec{\Omega} d\vec{\Omega}, \end{aligned} \quad (2)$$

где U_ν – объемная спектральная плотность энергии излучения, S_ν – спектральный поток энергии излучения. Первое уравнение в (1) домножим на телесный угол Ω и проинтегрируем по телесному углу 4π ; тогда получим

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{S}_\nu}{\partial t} + \frac{c}{3} \text{grad} U = -\chi_\nu \vec{S}_\nu.$$

В лазерных мишенях, где типичные размеры плазмы $L_H \sim 100 - 1000$ мкм, а времена изменения газодинамических параметров порядка $0,1 - 1$ нс, первый член в первом уравнении (1), как правило, по порядку величины много меньше, чем член в правой части ($\chi_\nu \sim 1/L_H$), и им можно пренебречь, тогда

$$\vec{S}_\nu = -\frac{c}{3\chi_\nu} \text{grad} U_\nu. \quad (3)$$

Усреднив по частотам уравнения (2) и (3), получим уравнения в одногрупповом приближении, описывающие перенос излучения в плазме

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{div} W_r = Q, \quad W_r = -\frac{cl_r}{3} \text{grad} U.$$

Здесь U – усредненная по частотам плотность энергии излучения, W_r – радиационный поток энергии, $Q_{er} = \int_0^\infty \chi_\nu (U_{\nu p} - U_\nu) d\nu$ – член, описывающий обмен энергией между фотонами и электронами, l_r – усредненный по спектру пробег излучения. Следуя [1], предположим, что "фотонный газ" имеет планковское распределение по частотам (энергиям квантов), причем эффективная температура фотонов T_r , вообще говоря, отличается от температуры плазмы. Тогда $U_\nu = (8\pi h\nu^3/c^3) [\exp(h\nu/kT_r) - 1]^{-1}$ и $U = 4\sigma T_r^4/c$, $\sigma = 2\pi^5 k^4/15h^3 c^2$ – постоянная Стефана-Больцмана. Вводим понятие плотности радиационной энергии на единицу массы $\epsilon_r = U/\rho$, тогда $\vec{W}_r = -cl_r \text{grad}(\rho\epsilon_r)/3$. Следуя [1], введем понятие усредненной по частотам длины свободного пробега квантов (росселандового пробега) $l_r = \int_0^\infty l_\nu \frac{dU_{\nu p}}{dT_r} d\nu / [\int_0^\infty \frac{dU_{\nu p}}{dT_r} d\nu]^{-1}$. Обмен энергией между фотонным и электронным компонентом плазмы можно представить в виде: $Q_{er} = J_{em} - J_{abs} = 4\sigma T_e^4/l_p - 4\sigma T_r^4/l'_p$. Здесь l_p, l'_p – усредненные ("планковские") длины пробега квантов при излучении и поглощении. Если предположить, что эти длины пробега имеют такой же вид, как в случае свободно-свободных квантовых переходов (тормозной механизм поглощения и испускания квантов [1]), тогда $l_p = a_b T_e^{3,5}/\rho^2$, $l'_p = a_b T_e^{0,5} T_r^3/\rho^2$, и обменный член имеет сравнительно простой вид: $Q_{er} = (4\sigma\rho^2/a_b T_e^{0,5})(T_e - T_r)$.

В том случае, когда учитываются только свободно-свободные переходы, коэффициент a_b вычисляется аналитически (см. [1]). Для учета влияния свободно-связанных

и связанно-связанных переходов в расчетах используются интерполяционные значения a_b либо таблицы (см., например, [3]). Ниже приведена система уравнений, описывающих перенос энергии между электронным, ионным и радиационным компонентами плазмы, которая запрограммирована в двумерной лагранжевой программе "АТЛАНТ" (см. [3]). В программе "АТЛАНТ" отдельно на каждом шаге по времени используется блок подпрограмм, рассчитывающий электронный (подпрограмма "HEATE"), ионный (подпрограмма "HEATI") и радиационный теплоперенос (подпрограмма "HEATR"):

$$\rho \frac{d\epsilon_e}{dt} = -\text{div}W_e, \quad \rho \frac{d\epsilon_i}{dt} = -\text{div}W_i, \quad \rho \frac{d\epsilon_r}{dt} = -\text{div}W_r,$$

где

$$W_e = -\kappa_e \text{grad}T_e, \quad W_i = -\kappa_i \text{grad}T_i, \quad W_r = -\kappa_r \text{grad}(\rho\epsilon_r).$$

В случае радиационной теплопроводности при определении потока энергии удобнее пользоваться градиентом удельной радиационной энергии ϵ_r , умноженной на плотность ρ . В этом случае граничное условие на внешней поверхности имеет простой вид: $W_r = (c\rho\epsilon_r \cos \bar{\nu})/2 = c\rho\epsilon_r/4$, то есть получается линейная зависимость потока от удельной энергии. Коэффициент радиационной теплопроводности $\kappa_r = cl_r/3$, c – скорость света, l_r – Росселандов пробег.

Особенность уравнения переноса радиационного потока по сравнению с уравнениями теплопроводности для электронного и ионного компонентов в виде граничного условия состоит в том, что в радиационной задаче имеется условие третьего рода на внешней границе. Обмен энергией между электронным, ионным и радиационным компонентами плазмы учитывается с помощью уравнений

$$\frac{d\epsilon_i}{dt} = c_\nu(T_e - T_i)/\tau_{ei}, \quad \frac{d\epsilon_e}{dt} = -c_\nu(T_e - T_i)/\tau_{ei} - Q_{er}(T_e - T_r), \quad \frac{d\epsilon_r}{dt} = Q_{er}(T_e - T_r).$$

Эти уравнения решаются в подпрограмме "RELAXR".

Для решения уравнения радиационного переноса, как и в уравнениях для электронного и ионного теплопереноса, используются неявные консервативные разностные схемы (подробнее см. [4]). Программы расчета уравнений теплопроводности многократно тестировались с помощью автомодельных решений (см., например, [5]). Однако в случае радиационной теплопроводности из-за нелинейной зависимости удельной радиационной энергии от температуры использовать традиционный метод разделения переменных не

удается. К тому же, в радиационной задаче существенное влияние на полученное решение оказывает учет излучения с поверхности (что приводит к граничному условию третьего рода).

Для тестирования тепловой части программы "АТЛАНТ" предложено автомодельное решение для следующей системы уравнений (при $\rho = 1$).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_e}{\partial t} &= -Q_{ei}(T_e - T_i), \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) &= Q_{er}(T_e - T_r), \\ \frac{\partial \epsilon_i}{\partial t} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \kappa_i \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) + Q_{ei}(T_e - T_i), \\ \frac{\partial \epsilon_r}{\partial t} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \chi_r \frac{\partial \epsilon_r}{\partial r} \right) + Q_{er}(T_e - T_i). \end{aligned} \quad (4)$$

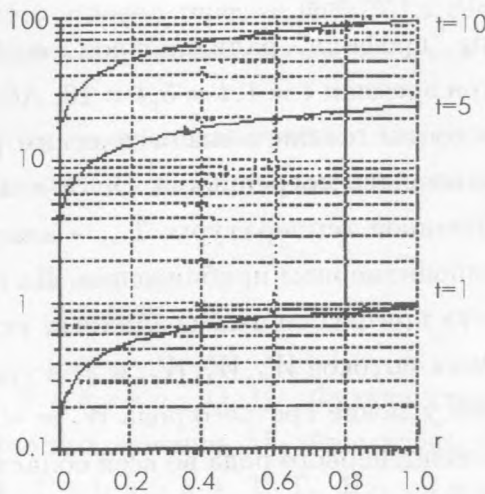


Рис. 1. Распределения по радиусу радиационной температуры на моменты времени $t = 1$, $t = 5$, $t = 10$ (усл. единицы).

При $Z = 1$ $\epsilon_e = c_v T_e$, $\epsilon_i = c_v T_i$ и $\epsilon_r = \sigma T_r^4$. Пусть $T_e = T_e^0 r^m t^n$, $T_i = T_i^0 r^m t^n$ и $T_r = T_r^0 r^m t^n$, $\kappa_e = \kappa_e^0 r^{3m+2} t^{3n-1}$, $\kappa_i = \kappa_i^0 r^2 t^{-1}$, $\chi_r = \chi_r^0 r^2 t^{-1}$, $Q_{ei} = Q_{ei}^0/t$, $Q_{er} = Q_{er}^0 r^{3m} t^{3n-1}$. Подставив эти выражения в (4), получим связи для постоянных коэффициентов

$$c_v n T_e^0 = -Q_{er}^0 (T_i^0 - T_e^0),$$

$$\kappa_e^0 T_e^0 m(4m + 3) = -Q_{er}^0 (T_e^0 - T_r^0),$$

$$c_\nu T_i^0 n = \kappa_i^0 m(m + 3) T_i^0 + Q_{ei}^0 (T_e^0 - T_i^0),$$

$$4n\sigma(T_r^0)^4 = 4m(4m + 3)\chi_r^0 \sigma(T_r^0)^4 + Q_{er}^0 (T_e^0 - T_r^0).$$

При $m > 0$ в центре мишени температура равна нулю (граничные условия первого рода). На правой границе будут условия второго рода для электронной и ионной теплопроводностей, и можно написать условие третьего рода для уравнения радиационной теплопроводности (при $r = R$)

$$W_e = -\kappa_e^0 m T_e^0 R^{4m+1} t^{4n-1}, W_i = -\kappa_i^0 m T_i^0 R^{m+1} t^n, W_r = -\chi_r^0 4m t^{-1} \epsilon_r.$$

Ниже приведены результаты сравнения численных и аналитических решений для случая $m = 0,4$, $n = 2$, $T_r^0 = 1$, $T_i^0 = 2$, $T_e^0 = 3$, $0 < t < 100$, $0 < r < R = 1$, $Q_{er} = 0,64r^{1,2}t^5$, $Q_{ei} = 574,85/t$, $\epsilon_i = 143,712$.

На рис. 1 представлены "профили" радиационной температуры (распределения по радиусу) для трех моментов времени $t = 1, t = 5, t = 10$. Абсолютное значение температуры выросло в 100 раз в соответствии с аналитическим решением. Для определения точности решения рассчитывалась погрешность $\Delta = \text{abs}(T_r - T_{ran})/T_{ran}$, где T_r - расчетное значение радиационной температуры, T_{ran} - аналитическое значение. Расчеты были выполнены в квазиодномерном приближении. На сетке, содержащей 60 узлов, было выполнено два расчета при различных граничных условиях: 1) на границе задаются аналитические значения потоков W_e, W_i, W_r , и 2) в уравнении для радиационного переноса задается граничное условие третьего рода $W_r = -1,6\epsilon_r/t$ (см. рис. 2а). Видно, что в случае граничных условий первого рода во всей области счета, кроме окрестности $r = 0$, ошибка составляет менее 1% (в окрестности нуля решение стремится к нулю, поэтому точность аппроксимации несколько хуже).

На рис. 2б представлены результаты решения уравнений теплопереноса с граничными условиями третьего рода. По оси ординат "невязка" отложена на логарифмической шкале. Видно, что и в этом случае относительная погрешность расчета ("невязка") мала, в частности, и вблизи границы $r = R$ (на уровне нескольких процентов). С увеличением числа узлов сетки точность решения возрастает.

В статье приведено аналитическое решение системы уравнений трехтемпературного теплопереноса в плазме. Это частное аналитическое решение может быть полезным при

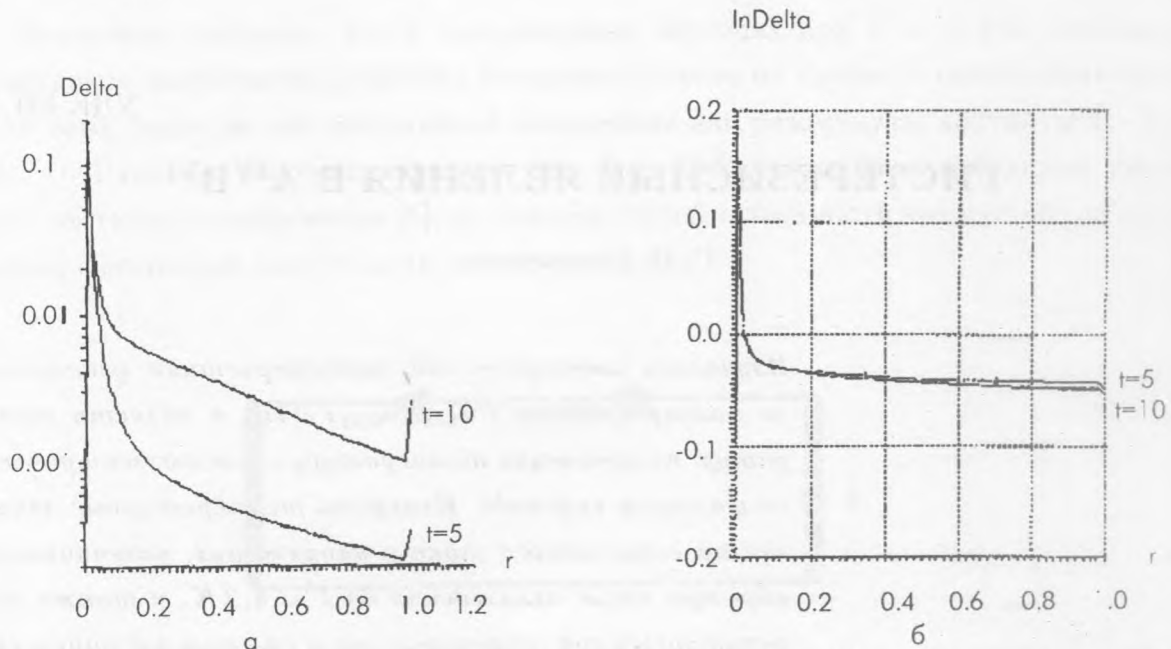


Рис. 2. Относительная погрешность расчета ($\Delta = (T_r - T_{ran})/T_{ran}$) на моменты времени $t = 5, t = 10$ в случае граничного условия второго рода (а) и граничного условия третьего рода (б). $T_r, T_{ran} = r^{0,4}t^2$ – расчетное и аналитическое значения температуры.

отладке и тестировании программ, предназначенных для решения уравнений радиационной газовой динамики, а также для качественного анализа радиационных явлений в плотной плазме.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Физматгиз, 1963.
- [2] Афанасьев Ю. В., Гамалий Е. Г., Розанов В. Б. Труды ФИАН, **134**, 10, (1982).
- [3] Lebo I. G., Pоров I. V., Rozanov V. B., Tishkin V. F. Journal of Russian Laser Research, **15**, 136 (1994); Препринт ФИАН N 2, М., 1993.
- [4] Тишкин В. Ф. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, М., 1979.
- [5] Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, N 39, М., 1981.

Поступила в редакцию 14 января 1997 г.