УДК 517.43, 517.944

МАТРИЧНОЕ УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ И СВЯЗАННЫЕ С НИМ ИНВЕРСНЫЕ МАТРИЧНЫЕ АЛГЕБРЫ ТРЕУГОЛЬНОГО ТИПА

В. А. Андреев

Рассмотрены инверсные матричные алгебры, возникающие при построении линейной задачи и преобразований Беклунда для матричного уравнения Лиувилля. Найден их явный вид в том случае, когда его решением является треугольная матрица размерности $N = 2, 3$.

В настоящее время известно множество интегрируемых уравнений и систем, в которых неизвестными величинами служат скалярные функции. Разработаны и различные методы построения таких систем и нахождения их решений [1, 2]. Мы будем исследовать проблему обобщения этих методов на случай, когда неизвестной функцией в уравнении является матрица. Иначе говоря, мы хотим построить такие матричные уравнения, которые были бы интегрируемыми и в скалярном пределе переходили бы в какое-либо известное интегрируемое скалярное уравнение. Под интегрируемостью мы будем понимать существование той или иной схемы, позволяющей регулярным образом строить решения уравнения. В данной работе мы рассмотрим первый элемент такой схемы, а именно, возможность представить нелинейное уравнение как условие совместности двух других уравнений. Причем, эти дополнительные уравнения могут быть как линейными, так и нелинейными, с одной неизвестной величиной или с несколькими.

Если взять какое-либо интегрируемое скалярное уравнение, заменить в нем функции матрицами и попытаться построить обычную схему метода обратной задачи, то мы столкнемся с двумя трудностями. Во-первых, выяснится, что производные от этих матриц должны коммутировать с самими матрицами и, кроме того, эти матрицы должны коммутировать с матрицами, на которых заданы дополнительные соотношения. Эти трудности проявляются и в том, что если взять нелинейное уравнение и заменить в нем функции матрицами, то не ясно, в каком порядке ставить эти матрицы в нелинейных элементах. Может оказаться, что при одном порядке уравнение будет интегрируемым, а при другом – нет. Мы предлагаем метод, позволяющий автоматически делать правильный выбор.

Идея метода была изложена в работах [3, 4]. Ее суть состоит в следующем. В обычном случае уравнения линейной задачи, для которых интегрируемое нелинейное уравнение служит условием совместности, строятся с помощью некоторой алгебры Ли или алгебры Каца–Муди [5]

$$\Phi_x = (\Sigma f_i F_i)\Phi,\ \Phi_t = (\Sigma g_i G_i)\Phi$$

$$F = \Sigma f_i F_i,\ G = \Sigma g_j G_j. \tag{1}$$

Здесь F_i и G_i – операторы алгебры и, зная их коммутационные соотношения, легко найти условия нулевой кривизны

$$F_t - G_x + [F, G] = 0. \tag{2}$$

При этом вид уравнений (2), т.е. тех уравнений, которым удовлетворяют функции f_i и g_j, зависит только от коммутационных соотношений, которым удовлетворяют операторы F_i и G_j, но не от их конкретного представления. В качестве примера рассмотрим уравнение Лиувилля (УЛ)

$$u_{xt} = e^u. \tag{3}$$

Для него величины F и G системы (1) имеют вид

$$F = X_0 + u_x X_1,\ G = e^u Y,$$

где операторы X_0, X_1, Y удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[X_1, Y] = Y,\ [X_0, Y] = -X_1. \tag{4}$$

Их можно реализовать с помощью операторов алгебры $sl\,(2)$. В случае матричных представлений, мы получим систему линейных уравнений, на основе которой можно развивать метод обратной задачи [6]. Если же воспользоваться реализацией операторов (4) в виде дифференциальных операторов

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x},\ X_0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x},\ Y = x^2\frac{\partial}{\partial x}, \tag{5}$$

то в этом случае система (1) примет вид

$$\Phi_x = -\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\Phi} + u_x\Phi\frac{\partial}{\partial\Phi}\right)\Phi,\ \Phi_t = -e^u\Phi^2\frac{\partial}{\partial\Phi}\Phi. \tag{6}$$

С помощью системы (6) легко построить преобразования Беклунда уравнения Лиувилля [7].

В работе [3] было построено матричное УЛ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(S_1^{-1}\frac{\partial}{\partial t}S_1\right) = -S_1^{-1}S_2,\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x}S_2S_2^{-1}\right) = S_2S_1^{-1}. \tag{7}$$

В отличие от скалярного УЛ (3), оно имеет вид системы. Система (7) является условием совместности вспомогательной системы

$$\frac{\partial}{\partial x}R = \left(-\frac{1}{\lambda}S_2\frac{\partial}{\partial R} - \frac{\partial}{\partial x}S_2S_2^{-1}R\frac{\partial}{\partial R}\right)R,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(R^{-1}) = \left(-\lambda S_1^{-1}\frac{\partial}{\partial(R^{-1})} + S_1^{-1}\frac{\partial}{\partial t}S_1R^{-1}\frac{\partial}{\partial(R^{-1})}\right)(R^{-1}), \tag{8}$$

являющейся матричным аналогом системы (6). Здесь $\frac{\partial}{\partial R}R = \frac{\partial}{\partial(R^{-1})}(R^{-1}) = 1$; S_1, S_2, R_1, R^{-1} – $N\times N$ – матрицы.

По аналогии с операторами (5) мы можем ввести операторы

$$\frac{\partial}{\partial R}, R\frac{\partial}{\partial R}, \frac{\partial}{\partial(R^{-1})}, R^{-1}\frac{\partial}{\partial(R^{-1})}. \tag{9}$$

Они образуют алгебру $sl\,(2)$. Однако в системе (8) можно перейти к поэлементной записи матриц R и R^{-1}. В этом случае символические производные $\frac{\partial}{\partial R}$, $\frac{\partial}{\partial(R^{-1})}$ заменятся на настоящие производные $\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$ и $\frac{\partial}{\partial y_{ij}}$ по элементам матриц R и R^{-1}. При этом переменные x_{ij} и y_{ij} связаны друг с другом как элементы прямой и обратной матриц. Отметим, что в каждое из уравнений системы (8) входят операторы, зависящие только от одного сорта переменных, либо x_{ij}, либо y_{ij}, образующие по отдельности конечную алгебру. Однако, если мы объединим эти операторы в одну алгебру, то она может оказаться бесконечной. Именно эти алгебры мы будем считать матричным обобщением обычных алгебр Ли. В работе [4] они были названы инверсными матричными алгебрами (ИМА). Их конкретный вид зависит как от размерности матрицы R, так и от ее типа. Мы будем различать три типа: диагональные, треугольные и полные матрицы. Легко видеть, что никаких промежуточных типов не существует, т.к. матрицы R, R^2 и R^{-1} должны принадлежать к одному и тому же типу. При вычислении коммутационных соотношений

ИМА большую роль играет тот факт, что обратная матрица от обратной совпадает с первоначальной $(R^{-1})^{-1} = R$. Это приводит к появлению в ИМА инволюции, которая и позволяет вычислять в явном виде производные от y_{ij} по x_{nm} и наоборот.

Рассмотрим теперь конкретные примеры. Сначала установим связь между переменными $x_{ab}, y_{ij}; a, b, i, j, = 1, ..., N$. Поскольку x_{ab} – элементы матрицы R, а y_{ij} – элементы обратной матрицы R^{-1}, то они связаны соотношением

$$y_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{1}{D} M_{ij}, \quad \frac{\partial}{\partial y_{ij}} = -\sum_{a,b=1}^{N} x_{ia} x_{bj} \frac{\partial}{\partial x_{ab}}, \tag{10}$$

где M_{ij} – минор элемента x_{ij}, $D = \det R$. Пользуясь формулами (10), можно вычислить коммутационные соотношения между операторами

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}}, \; x_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}, \; \frac{\partial}{\partial y_{ij}}, \; y_{ij} \frac{\partial}{\partial y_{ij}}, \; i, j = 1, ..., N. \tag{11}$$

Эти операторы образуют ИМА, являющиеся матричным обобщением алгебры $sl\,(2)$. Именно они появляются, если систему (8) записать для компонент матрицы R и R^{-1}, и являются обобщением операторов (5), соответствующих скалярному УЛ и образующих алгебру $sl\,(2)$. Существует три принципиально различных случая.

1) R – диагональная матрица.

$$\text{В этом случае } y_{ii} = \frac{1}{x_{ii}}, \quad \frac{\partial}{\partial y_{ii}} = -x_{ii}^2 \frac{\partial}{\partial x_{ii}}.$$

Алгебра (11) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x_{ii}}, \; x_{ii} \frac{\partial}{\partial x_{ii}}, \; x_{ii}^2 \frac{\partial}{\partial x_{ii}}, \; i = 1, ..., N. \tag{12}$$

Мы видим, что она имеет вид прямой суммы N алгебр $sl\,(2)$, коммутирующих друг с другом:

$$AI(sl(2))_D^N = sl(2) \oplus ... \oplus sl(2). \tag{13}$$

Соответственно, матричное УЛ распадается на N не связанных друг с другом скалярных УЛ. Это следует из того, что если в уравнениях (8) матрицы R и R^{-1} диагональны, то и матрицы S_1, S_2 тоже должны быть диагональными.

2) R – треугольная матрица:

$$x_{ij} \neq 0 \text{ при } i \leq j, \; i, j = 1, ..., N.$$

Пусть сначала $N = 2$ и мы имеем три прямые переменные x_{11}, y_{12}, y_{22}. Им соответствуют операторы

$$\frac{\partial}{\partial x_{11}}, x_{11}\frac{\partial}{\partial x_{11}}, \frac{\partial}{\partial x_{22}}, x_{22}\frac{\partial}{\partial x_{22}}, \frac{\partial}{\partial x_{12}}, x_{12}\frac{\partial}{\partial x_{12}},$$

$$\frac{\partial}{\partial y_{11}} = -x_{11}^2\frac{\partial}{\partial x_{11}} - x_{11}x_{12}\frac{\partial}{\partial x_{12}}, y_{11}\frac{\partial}{\partial y_{11}} = -x_{11}\frac{\partial}{\partial x_{11}} - x_{12}\frac{\partial}{\partial x_{12}},$$

$$\frac{\partial}{\partial y_{22}} = -x_{22}^2\frac{\partial}{\partial x_{22}} - x_{12}x_{22}\frac{\partial}{\partial x_{12}}, y_{22}\frac{\partial}{\partial y_{22}} = -x_{22}\frac{\partial}{\partial x_{22}} - x_{12}\frac{\partial}{\partial x_{12}}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_{12}} = -x_{11}x_{22}\frac{\partial}{\partial x_{12}}, y_{12}\frac{\partial}{\partial y_{12}} = x_{12}\frac{\partial}{\partial x_{12}}.$$

Из этих операторов можно составить две коммутирующие друг с другом алгебры $sl(2)$

$$\left\{E_+^{11} = \frac{\partial}{\partial x_{11}}, E_-^{11} = \frac{\partial}{\partial y_{11}}, H^{11} = x_{11}\frac{\partial}{\partial x_{11}} - y_{11}\frac{\partial}{\partial y_{11}}\right\} = sl^{11}(2),$$

$$\left\{E_+^{22} = \frac{\partial}{\partial x_{22}}, E_-^{22} = \frac{\partial}{\partial y_{22}}, H^{22} = x_{22}\frac{\partial}{\partial x_{22}} - y_{22}\frac{\partial}{\partial y_{22}}\right\} = sl^{22}(2)$$

и нильпотентный идеал

$$N_{12} = \left\{x_{12}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_{12}}, x_{11}^{\alpha}x_{12}^{\beta}\frac{\partial}{\partial x_{12}}, \alpha, \beta = 0, 1\right\}.$$

Такую структуру имеет ИМА $AI(sl(2))_T^2$, она является конечной. Введем оператор O, переводящий прямую матрицу в обратную и задающий связь между их элементами и операторами (11) согласно формулам (10):

$$O : x_{ij} \longleftrightarrow y_{ij}, \ \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial y_{ij}}.$$

При действии на операторы алгебр $sl^{ii}(2)$ оператор O переводит друг в друга операторы базиса Картана–Вейля, отвечающие положительным и отрицательным корням, а оператор картановской подалгебры меняет знак:

$$O : E_{\pm}^{ii} \longrightarrow E_{\mp}^{ii}, \ O : H^{ii} \longrightarrow -H^{ii}.$$

Оператор O расщепляет картановский элемент на две части: $x_{11}\frac{\partial}{\partial x_{11}}$ и $-y_{11}\frac{\partial}{\partial y_{11}}$. В случае диагональной матрицы они совпадают и по отдельности образуют картановский элемент, но если матрица R недиагональна, то они уже не совпадают и лишь их сумма является оператором картановской подалгебры. На элементы идеала N_{12} оператор O действует следующим образом:

$$O : x_{12}\frac{\partial}{\partial x_{12}} \longrightarrow y_{12}\frac{\partial}{\partial y_{12}} = x_{12}\frac{\partial}{\partial x_{12}} - \text{ неподвижная точка отображения } O,$$

$$O : x_{11}^{\alpha} x_{22}^{\beta}\frac{\partial}{\partial x_{12}} \longrightarrow x_{11}^{1-\alpha} x_{22}^{1-\beta}\frac{\partial}{\partial x_{12}}.$$

Эта алгебра конечномерна, но, начиная с $N = 3$, все такие алгебры становятся бесконечномерными. При $N = 3$ ИМА $AI(sl(2))^3_T$ состоит из операторов, образующих три алгебры $sl(2)$

$$\left\{E_+^{11} = \frac{\partial}{\partial x_{11}}, E_-^{11} = \frac{\partial}{\partial y_{11}}, H^{11} = x_{11}\frac{\partial}{\partial x_{11}} - y_{11}\frac{\partial}{\partial y_{11}}\right\} = sl^{11}(2),$$

$$\left\{E_+^{22} = \frac{\partial}{\partial x_{22}}, E_-^{22} = \frac{\partial}{\partial y_{22}}, H^{22} = x_{22}\frac{\partial}{\partial x_{22}} - x_{13}\frac{\partial}{\partial x_{13}} - y_{22}\frac{\partial}{\partial y_{22}} + y_{13}\frac{\partial}{\partial y_{13}}\right\} = sl^{22}(2),$$

$$\left\{E_+^{33} = \frac{\partial}{\partial x_{33}}, E_-^{33} = \frac{\partial}{\partial y_{33}}, H^{33} = x_{33}\frac{\partial}{\partial x_{33}} - y_{33}\frac{\partial}{\partial y_{33}}\right\} = sl^{33}(2),$$

а также три нильпотентные алгебры

$$\left\{x_{11}^{\alpha} x_{22}^{\beta}\frac{\partial}{\partial x_{12}},\ x_{12}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_{12}}\right\} = N_{12}$$

$$\left\{x_{22}^{\alpha} x_{33}^{\beta}\frac{\partial}{\partial x_{23}},\ x_{23}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_{23}}\right\} = N_{23}$$

$$\left\{x_{11}^{\alpha} x_{22}^{n} x_{23}^{\beta}\frac{\partial}{\partial x_{13}},\ x_{11}^{\alpha} x_{22}^{n} x_{33}^{\beta}\frac{\partial}{\partial x_{13}},\ x_{12}^{\alpha} x_{22}^{n} x_{33}^{\beta}\frac{\partial}{\partial x_{13}},\ x_{12}^{\alpha} x_{22}^{n} x_{23}^{\beta}\frac{\partial}{\partial x_{13}},\right.$$

$$\left. x_{13}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_{13}}\right\} = N_{13},$$

$$\alpha, \beta = 0, 1,\ n = -\infty, \ldots + \infty.$$

Алгебры N_{12} и N_{23} конечные, а N_{13} – бесконечная. Коммутационные соотношения между их операторами легко найти, пользуясь их явным видом. Алгебре $AI(sl(2))^3_T$ соответствует матричное УЛ, которое распадается на систему трех независимых скалярных УЛ и систему трех связанных друг с другом линейных уравнений с коэффициентами, являющимися решениями этих УЛ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96–02-17987).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М., Мир, 1987.

[2] Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М., Мир, 1989.

[3] Андреев В. А. ТМФ, **83**, 41 (1990).

[4] Андреев В. А. ТМФ, **84**, 353 (1990).

[5] Андреев В. А. ТМФ, **36**, 335 (1978).

[6] Андреев В. А. ТМФ, **29**, 213 (1976).

[7] Андреев В. А. Труды ФИАН, **173**, 200 (1986).

Поступила в редакцию 20 января 1997 г.