УДК 530.145+535.33

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА МОДЕЛИ ДИКЕ БЕЗ ПРИБЛИЖЕНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВОЛНЫ: МЕЖДУ ПОРЯДКОМ И ХАОСОМ[1]

В. П. Карасев, Л. Е. Коньков[2], С. В. Пранц[2]

Сравниваются две квазиклассические версии точечной одномодовой модели Дике без приближения вращающейся волны, которые основаны на двух схемах расцепления корреляторов высших порядков: одна содержит только корреляторы первого порядка, а другая включает корреляторы второго порядка. Показано, что обе модели демонстрируют одинаковую тонкую структуру перехода от регулярной динамики к хаотической, которая характеризуется зависимостью максимального показателя Ляпунова от величины атомно-полевой связи.

Как хорошо известно, различные варианты модели Дике [1], описывающей на квантовом уровне взаимодействие находящегося в конечном объеме (резонаторе) ансамбля двухуровневых атомов с полем излучения в дипольном приближении, широко используются для выявления и анализа разнообразных кооперативных и динамических эффектов: сверхизлучения, затухания и восстановления осцилляций Раби и т.д. (см., например, [2 – 7] и цитированную там литературу). В последнее время большое внимание уделяется анализу динамических режимов в таких моделях при использовании различных, в частности, квазиклассических приближений [5 – 10].

Так, в работах [4 – 6] в рамках приближений вращающейся волны (ПВВ) и среднего поля были получены решения динамических уравнений в терминах двоякопериодических эллиптических функций Вейерштрасса или Якоби, которые характеризуют хотя

---

[1]Работа выполнена в рамках совместного проекта, поддержанного РФФИ (грант N 96-02-18746-а).

[2]Тихоокеанский океанологический институт ДВО РАН.

и сложную, но регулярную динамику системы и адекватны для анализа эффектов затухания и восстановления осцилляций Раби. В то же время в работах [8, 9] (и ранее в работах [11 – 13]) в рамках (полу)классического анализа была установлена (при некоторых значениях константы атомно-полевой связи – своеобразного "параметра порядка") возможность перехода от регулярной динамики системы к хаотической для моделей типа Дике без ПВВ. При таком анализе использовался (в явной или неявной форме) переход от операторных уравнений Гейзенберга к уравнениям для средних с помощью тех или иных процедур расцепления атомно-полевых корреляторов, которые, однако, не учитывали квантовые корреляции атомной и полевой подсистем. С другой стороны, в работах [6, 10, 14] для решения спектральных и эволюционных задач в моделях Дике в рамках ПВВ был разработан формализм, вводящий коллективные динамические переменные, которые позволяют учитывать такого рода корреляции.

Цель настоящей работы – получить соответствующие квазиклассические динамические уравнения для одномодовой модели Дике без ПВВ с использованием коллективных переменных [10, 14] и сравнить динамические свойства полученной модели с изученной в работах [8, 9].

Одномодовая точечная (когда размер атомного образца предполагается много меньше длины волны излучения) модель Дике вне рамок ПВВ описывается гамильтонианом [1, 2]

$$H = \hbar\omega R_0 + \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) + \hbar\Omega_0(a + a^\dagger)(R_+ + R_-) = \tag{1}$$

$$= H_{RWA} + \hbar\Omega_0(a^\dagger R_+ + aR_-),$$

где H_{RWA} – гамильтониан модели в ПВВ, Ω_0 – константа связи, коллективные атомные операторы $R_0 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sigma_z^j$, $R_\pm = \sum_{j=1}^{N}\sigma_\pm^j$ ($\sigma_{z,\pm}^j$ – матрицы Паули) удовлетворяют коммутационным соотношениям "атомной" группы $SU^a(2)$ и частота моды поля в резонаторе для простоты полагается равной частоте атомного перехода (резонансное взаимодействие). Пространство L_H квантовых состояний модели порождается базисными векторами [2]

$$|j, m, \{j_{int}\}; k >= [k!]^{-1/2}(a^+)^k|0 > |j, m, \{j_{int}\} >, \tag{2}$$

где $|j, m, \{j_{int}\} >$ – базисные векторы пространств неприводимых представлений D^j

группы $SU^a(2)$, получаемые из базисных векторов отдельных атомов с помощью обобщенных коэффициентов Вигнера группы $SU^a(2)$ [2], а $[k!]^{-1/2}(a^+)^k|0>$ – фоковские состояния поля.

Квантовая модель (1), (2) имеет два операторных интеграла движения: гамильтониан (1) и оператор Казимира группы $SU^a(2)$ $C_2^a \equiv R_0^2 + \frac{1}{2}(R_+R_- + R_-R_+)$, которым на классическом уровне анализа соответствуют "классические" интегралы движения: полная энергия E и "радиус R_B сферы Блоха" S_B^2 [8]. Поэтому "динамическое" фазовое пространство системы $\mathcal{M}_H \subset S_B^2 \otimes C$, определяемое орбитами соответствующего гамильтонова фазового потока и задаваемое с помощью обобщенных когерентных состояний (ОКС) групп $SU^a(2)$ и Вейля W (1) [15, 16], представляет собой (некомпактное) подмногообразие, задаваемое пересечением прямого произведения сферы S_B^2 и (полевой) комплексной плоскости C с гиперповерхностью $E = \text{const}$ (см. (6)).

Уравнения Гейзенберга для атомных (R_i) и полевых (a, a^+) динамических переменных модели (1) – (2) имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{dR_0}{dt} &= \Omega_0(a + a^\dagger)R_2, \\
\frac{dR_1}{dt} &= -\omega R_2, \\
\frac{dR_2}{dt} &= \omega R_1 - 2\Omega_0(a + a^\dagger)R_0, \\
i\frac{da^\dagger}{dt} &= -\omega a^\dagger - 2\Omega_0 R_1, \\
i\frac{da}{dt} &= \omega a + 2\Omega_0 R_1,
\end{aligned} \tag{3}$$

где $R_1 = \frac{1}{2}(R_+ + R_-)$, $R_2 = \frac{1}{2i}(R_+ - R_-)$. Переход от операторных уравнений (3) к квазиклассическим уравнениям для средних осуществляется с помощью процедур расцепления корреляторов, использующих те или иные приближения, которые характеризуют степень учета квантовых флуктуаций и корреляций между атомной и полевой подсистемами.

Простейшая система (квази)классических динамических уравнений получается из (3) с помощью использования приближения среднего поля, при котором средние от любых функций операторов $R_{0,\pm}, a, a^\dagger$ заменяются теми же функциями от корреляторов первого порядка – средних $< a >, < a^\dagger >, < R_{0,\pm} >$, что соответствует факторизации корреляторов второго порядка в произведения корреляторов первого порядка. Такая процедура расцепления корреляторов, не учитывающая квантовые флуктуации и атомно-полевые корреляции, может быть реализована на ОКС $|\xi;\alpha\rangle$ прямого произведения групп $SU^a(2)$ и Вейля W (1):

$$
\begin{aligned}
|\xi;\alpha\rangle &= \exp(\xi R_+ - \xi^* R_-)\exp(\alpha a^+ - \alpha^* a)|j,-j,\{j_{int}\};0>= \\
&= \exp(\xi R_+ - \xi^* R_-)|j,-j,\{j_{int}\}> \exp(\alpha a^+ - \alpha^* a)|0> .
\end{aligned} \tag{4}
$$

Тогда, вводя следующие обозначения для средних

$$
x = \frac{<R_1>}{N},\ y = \frac{<R_2>}{N},\ z = \frac{2}{N}<R_0>,\ \zeta = \frac{1}{\sqrt{N}}<a + a^\dagger>,\ \beta = \frac{i}{\sqrt{N}}<a - a^\dagger>,
$$

можно представить получаемую из (3) замкнутую систему динамических уравнений для корреляторов первого порядка в безразмерной форме, которая удобна для численного анализа [8, 9]:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -y, \\
\dot{y} &= x - 4\Omega\zeta z, \\
\dot{z} &= 4\Omega\alpha y, \\
\dot{\zeta} &= -\beta, \\
\dot{\beta} &= \zeta + 4\Omega x,
\end{aligned} \tag{5}
$$

где точка обозначает производную по $\tau = \omega t$, а $\Omega = \frac{\Omega_0\sqrt{N}}{2\omega}$ – безразмерная коллективная частота Раби Ω. Переменные x, y, z, ζ, β задают "естественные" координаты динамического фазового пространства системы $\mathcal{M}_H$, определяемого двумя вышеупомянутыми интегралами движения системы (5), которые в переменных x, y, z, ζ, β задаются уравнениями

$$
x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ \zeta^2 + \beta^2 + 2z + 8\Omega\zeta x = \text{const}. \tag{6}
$$

Известно, что для модели Дике в ПВВ, описываемой гамильтонианом H_{RWA}, имеется третий интеграл движения, связанный с сохранением числа возбуждений $W_0 = R_0 + a^+a$, что делает эту модель точно решаемой в ПВВ, тогда как его разрушение при отказе от ПВВ приводит к возможности возникновения динамического хаоса в классической модели Дике без ПВВ [8, 11 – 13]. Точная решаемость модели Дике в ПВВ наиболее четко проявляется при использовании вместо атомных динамических переменных R_i их кластерных аналогов $V_+ = aR_+$, $V_0 = R_0$, $V_- = a^\dagger R_-$ (описывающих "одетые" атомы и учитывающих явно атомно-полевые корреляции) [6]. Тогда уравнения Гейзенберга для динамических переменных $V_1 = \frac{1}{2}(V_+ + V_-)$, $V_2 = \frac{1}{2i}(V_+ - V_-)$, $V_0, a, a^\dagger$ будут содержать в ПВВ замкнутую подсистему для переменных $V_{1,2,0}$, которая решается в приближении среднего поля в терминах эллиптических функций [4 – 6]. Поэтому представляется естественным иследовать динамические режимы в других по сравнению с (5) квазиклассических моделях, порождаемых гамильтонианом (1) и использующих кластерные переменные $V_{1,2,0}$.

Простейший вариант таких квазиклассических моделей может быть получен при применении к (выводимым из (3)) уравнениям Гейзенберга для переменных $V_1, V_2, V_0, a, a^\dagger$ "кластерного" приближения среднего поля, при котором, в частности, расцепляются полевые и кластерные корреляторы; на языке исходных атомно-полевых переменных эта процедура соответствует факторизации трехчастичных корреляторов в произведения одно- и двухчастичных корреляторов. Тогда, вводя вместо средних значений x и y новые средние $u = \frac{1}{N\sqrt{N}} < V_+ + V_- >$, $v = -\frac{i}{N\sqrt{N}} < V_+ - V_- >$, в итоге придем к системе нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -2\Omega\zeta\beta z + 8\Omega\frac{(\zeta u - \beta v)(\zeta v + \beta u)}{(\zeta^2 + \beta^2)^2}, \\ \dot{v} &= -2\Omega\zeta^2 z - 8\Omega\frac{(\zeta u - \beta v)^2}{(\zeta^2 + \beta^2)^2}, \\ \dot{z} &= 8\Omega\zeta\frac{\zeta v + \beta u}{\zeta^2 + \beta^2}, \\ \dot{\zeta} &= -\beta, \\ \dot{\beta} &= \zeta + 8\Omega\frac{\zeta u - \beta v}{\zeta^2 + \beta^2}, \end{aligned} \tag{7}$$

которая описывает квазиклассическую динамику поля и "одетых" атомов. Система (7), как и модель (5), также имеет два интеграла движения, задаваемые в переменных u, v, z, ζ, β уравнениями

$$\frac{u^2 + v^2}{\zeta^2 + \beta^2} + \frac{z^2}{4} = \text{const}, \ \zeta^2 + \beta^2 + 2z + 16\Omega\frac{\zeta((\zeta u - \beta v)}{\zeta^2 + \beta^2} = \text{const}.$$

На первый взгляд, системы (5) и (7) различны, поскольку вторая содержит двухчастичные корреляторы u и v. Однако нетрудно показать, что они математически эквиваленты, так как система (7) при нелинейном гомеоморфизме $u = (\zeta x + \beta y)/2$, $v =$

$(\zeta y-\beta x)/2$ преобразуется в (5). Тот факт, что учет двухчастичных корреляторов не привел к новой информации, с физической точки зрения объясняется прежде всего тем, что сделанная при выводе системы (7) факторизация атомно-полевых корреляторов привела, как и в системе (5), к потере источников спонтанного излучения. С математической точки зрения такая эквивалентность означает, что оба приближения реализуются на одном и том же классе квантовых состояний (типа ОКС (4)), так что расцепление полевых корреляторов с кластерными автоматически влечет их расцепление и с атомными корреляторами. Поэтому исследование динамических режимов, в частности, переходов "порядок-хаос-порядок", в модели (7) полностью соответствует их анализу для модели (5). Резюмируем полученные при этом результаты.

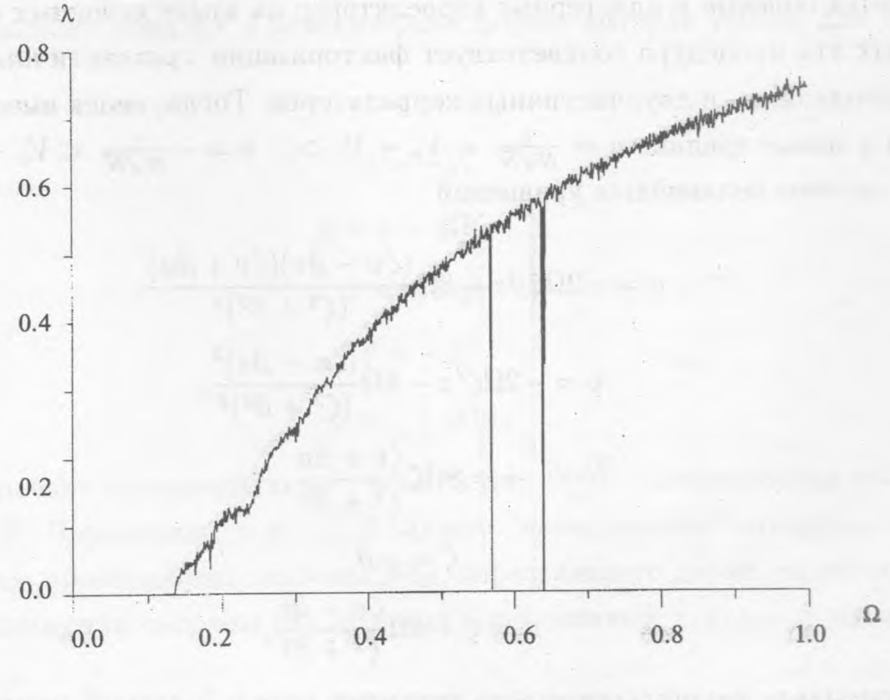

Рис. 1. *Зависимость максимального показателя Ляпунова λ классической версии модели Дике от силы атомно-полевой связи (величины безразмерной коллективной частоты Раби Ω).*

В квазиклассической модели (5), не учитывающей спонтанное излучение, переход к гамильтонову динамическому хаосу наступает при превышении управляющим параметром Ω некоторого критического значения Ω_c, которое определяется начальными условиями [8, 11 – 13]. Мы тщательно численно исследовали переход от регулярности к хаосу в этой модели. Наилучшую характеристику такого перехода дают так называемые λ-карты динамической системы, представляющие собой в рассматриваемом случае двумерную зависимость максимального показателя Ляпунова λ от величины Ω и от величины начальной плотности атомной инверсии $z(0)$ [9]. На таких топографических картах области хаоса ($\lambda > 0$) представляются в виде "континентов" или "островов", окруженных "морями", где $\lambda = 0$ (области регулярного движения). Использование более мелкого шага при численном интегрировании систем (5) и (7) позволило выявить (одинаковую для обеих моделей) тонкую структуру перехода от регулярности к хаосу, ускользавшую ранее [8, 9, 11, 13] при численном анализе полуклассических моделей Джейнса–Каммингса и Дике. На рис. 1 изображена зависимость для системы (5) максимального показателя Ляпунова λ от безразмерной коллективной частоты Раби Ω при начальных условиях, которые соответствуют изначально полностью инвертированным атомам ($x(0) = y(0) = 0, z(0) = 1$) и когерентному начальному состоянию поля со средним числом фотонов $< a^+a >= 1/2$.

Полученная выше эквивалентность двух квазикласических моделей (5) и (7), порождаемых гамильтонианом (1), ставит вопрос о поиске других приближений, которые позволили бы выявить новые характерные черты динамики модели (1) – (2). Укажем некоторые возможности совершенствования проведенного анализа. Одна из них связана с выбором альтернативных к использованным динамических переменных (например, набора $V_1, V_2, V_0, W_0 = R_0 + a^+a$, $W_+ = R_+a^\dagger$, $W_- = R_-a$, описывающего "кластерную" динамику и удобного для сопоставления версий модели (1) – (2) как в рамках, так и вне ПВВ), а другая – с использованием по аналогии с работами [10, 14, 16] более тонких, чем приближение среднего поля, процедур расцепления атомно-полевых корреляторов, основанных на применении техники ОКС типа (4) (но с другими, коллективными группами динамической симметрии) и приводящих к приближениям типа Хартри–Фока с зависимостью от времени [10].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Dicke R. H. Phys. Rev., **93**, 99 (1954).

[2] Карасев В. П., Шелепин Л. А. Труды ФИАН, **144**, 124 (1984).

[3] Андреев А. В., Емельянов В. И., Ильинский Ю. А. УФН, **31**, вып. 4, 653 (1980).

[4] Kumar S. and Mehta C. L. Phys. Rev., **A 21**, 1573 (1980).

[5] H a s s a n S. S., A b d a l l a M. S., O b a d a A.-S. F., and B a t a f r i H. A. J. Mod. Opt., **40**, 1351 (1993).

[6] К а р а с е в В. П. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 3 – 4, 51 (1993); K a r a s s i o v V. P. J. Phys., **A 27**, 153 (1994).

[7] C h u m a k o v S. M. and K o z i e r o w s k i M. Quant. Semicals. Opt., **8**, 775 (1996).

[8] П р а н ц С. В., К о н ь к о в Л. Е. Квантовая электроника, **23**, 93 (1996).

[9] П р а н ц С. В., К о н ь к о в Л. Е. Известия РАН. Серия физич., **60**, 178 (1996).

[10] K a r a s s i o v V. P. E-archive: QUANT-PH/9608016 (1996).

[11] Б е л о б р о в П. И., З а с л а в с к и й Г. М., Т а р т а к о в с к и й Г. Х. ЖЭТФ, **71**, 1799 (1976).

[12] З а с л а в с к и й Г. М. Стохастичность динамических систем, М., Наука, 1984.

[13] A c k e r h a l t J. R., M i l o n n i P. W., and S h i h M. L. Phys. Rep., **128**, 205 (1985).

[14] K a r a s s i o v V. P. Proceedings of VII Conference on Symmetry in Physics (JINR, Dubna, July 10–16, 1995), eds N. A. Sissakian and G. S. Pogosyan. Dubna, JINR, 1996, v. 1, p. 306.

[15] П е р е л о м о в А. М. Обобщенные когерентные состояния и их приложения, М., Наука, 1987.

[16] J e z e k D, M. and H e r n a n d e z E. S. Phys. Rev., **C 35**, 1555 (1987); Phys. Rev., **A 42**, 96 (1990).

Поступила в редакцию 7 февраля 1997 г.