УДК 530.1

МЕТОД ЛИНЕАРИЗАЦИИ В ТЕОРИИ КОЛЕЦ

Р. А. Захеди

На основе подхода, использующего теорию колец, получены системы линейных уравнений, сохраняющих определенные инвариантные формы. Для квадратичных форм автоматически возникают матрицы Паули, Дирака, алгебры Клиффорда. Построены системы уравнений, описываемые прямоугольными матрицами.

В работах [1, 2] была установлена взаимосвязь совокупностей элементов конкретных колец с бинарными операциями сложения и умножения

$$\begin{cases} f(M) \oplus f(N) = f(M \oplus N) \oplus h_1(M, N), \\ f(M) \otimes f(N) = f(M \otimes N) \otimes h_2(M, N), \end{cases} \tag{1}$$

где f, h_1, h_2 – функции: $f : D_f \to R; h_1, h_2 : D_f^2 \to R$, $(D_f, \oplus, \otimes)$, $(R, \oplus, \otimes)$ – кольца с единицей. Был также разработан метод нахождения $f(M)$ по заданным функциям h_1 и h_2.

Так, для квадратичной формы $f(m, n) = m^2 + n^2$ справедливы бинарные операции

$$\begin{cases} f(m,n) + f(k,l) = f(m+k, n+l) + h_1(m,n;k,l), \\ f(m,n) \times f(k,l) = f(mk + \alpha nl, ml + nk) + h_2(m,n;k,l), \end{cases} \tag{2}$$

где $h_1(m,n;k,l) = -2(mk+nl)$, $h_2(m,n;k,l) = -2(\alpha+1)mnkl + n^2l^2(1-\alpha^2)$. И обратно, из операций (2) может быть получено выражение для $f(m,n)$.

Здесь важно то, что предложенный метод, как показано в [1, 2], позволяет находить решения функциональных уравнений типа

$$f(A) = f(B). \tag{2'}$$

Например в (2): $f(a,b) = f(c,0)$ или $f(a,b) = f(c,d)$, которые при обычном написании имеют вид

$$a^2 + b^2 = c^2, \tag{3}$$

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2. \tag{4}$$

Из (2) вытекают условия симметрии, с помощью которых в [1, 2] для уравнения (3) были получены соотношения

$$f(an + bm, am - bn) = f(cm, cn) \to$$

$$an + bm = cm,\ am - bn = cn, \tag{5}$$

а для (4) – соотношения:

$$am + bn = cm + dn,\ an - bm = -cn + dm,\ aq + bp = cq - dp$$

$$ap - bq = -cp - dq, \tag{6}$$

где $\forall m, n, p, q \in D_f$.

Таким образом, вместо нелинейных уравнений типа (3), (4) записываются эквивалентные им системы линейных уравнений (5), (6). В [1, 2] этот подход использован для решения целого ряда диофантовых уравнений.

В настоящей работе показано, что развитый ранее подход можно рассматривать и как метод построения систем линейных уравнений, сохраняющих определенные инвариантные (нелинейные) формы. Эти системы могут записываться в матричном виде, а их структура имеет ряд интересных особенностей.

Рассмотрим сначала уравнение (3). Система уравнений (5) может быть записана в матричной форме через матрицы Паули.

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0,\ (c = -ic') \to \{am + bn - c'n = 0, -an + bm + c'm = 0\},$$

$$\left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = 0. \tag{7}$$

Ниже форма записи (7) будет использована как стандартная.

Сначала записывается нелинейное уравнение, затем после стрелки в фигурных скобках система линейных уравнений, определяемая согласно [1, 2] из соотношений симметрии. Внизу записывается система в матричной форме.

Для уравнения (4) имеем

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0,\ (c = -ic', d = -id') \to \Big\{\ am + bn - c'm + d'n = 0,$$

$$an - bm + c'n + d'm = 0,\ aq + bp - c'q - d'p = 0,\ ap - bq + c'p - d'q = 0\},$$

$$\left\{ a \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + d \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} m \\ n \\ q \\ p \end{bmatrix} = 0. \tag{8}$$

Для лоренц-инвариантной формы имеем

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0, \ (d = -id') \to \{ \ ap + bq + cm - d'p = 0, aq - bp +$$

$$+ cn + d'q = 0, \ an + bm - cq - d'n = 0, am - bn - cp + d'm = 0\},$$

$$\left\{ a \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} m \\ n \\ q \\ p \end{bmatrix} = 0. \tag{9}$$

Как видим, в этом случае возникают матрицы Дирака γ_i.

Аналогичные результаты могут быть получены и для квадратичных форм с пятью и более слагаемыми. Их структура имеет простой вид:

$$\alpha_{[2n\times 2n]} = \begin{bmatrix} 0_{[n\times n]} & \gamma_{[n\times n]} \\ \gamma_{[n\times n]} & 0_{[n\times n]} \end{bmatrix}, \ \alpha_1 = \begin{bmatrix} I_{[n\times n]} & 0_{[n\times n]} \\ 0_{[n\times n]} & -I_{[n\times n]} \end{bmatrix},$$

где $n = 2^k$, $k = 1, 2, 3...$

Все эти матрицы соответствуют алгебрам Клиффорда [3, 4], они удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}. \tag{10}$$

Алгебры Клиффорда могут рассматриваться как базисный набор гиперкомплексных чисел, обладающих свойством ассоциативности. В общем случае нелинейному уравнению $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 0$, $(a_n = -ia'_n)$ соответствует матричное уравнение

$$a_k \alpha_{ij}^k \varphi^j = 0, \tag{11}$$

где $n \geq 3$, $k = 1...n$, $i, j = 1...2^{(n-2)}$.

Аналогично алгебраическим уравнением типа (2) можно рассматривать преобразование дифференциальных уравнений высших порядков в систему дифференциальных уравнений первого порядка. Так, подобно (9) для уравнения Клейна – Гордона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \tag{12}$$

может быть записана система уравнений первого порядка, соответствующая уравнению Дирака. Подобные системы уравнений могут быть получены и для произвольных выражений типа $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \varphi = 0$.

Наряду с квадратичными матрицами, в результате линеаризации могут возникать прямоугольные матрицы. Для условий (9) при $m = 0$ (или $n = 0$; $q = 0$; $p = 0$) имеем

$$\left\{ a \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} n \\ q \\ p \end{bmatrix} = 0. \tag{13}$$

Матрицы β_i, имеющие размерность 4×3, имеют следующие перестановочные свойства

$$\beta_k^* \beta_l + \beta_l^* \beta_k = 2\delta_{kl}, \tag{14}$$

здесь β_i^* – транспонированная матрица размерностью 3×4, а матрицы δ_{kl} имеют размерность 3×3.

С помощью рассматриваемого метода линеаризации могут быть получены конкретные матрицы β_i для форм $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$ $(e = -ie')$ и форм, содержащих большее число слагаемых. Не выписывая здесь их явный вид, отметим лишь, что размерности прямоугольных матриц для числа слагаемых в формах, начиная с четырех, имеют следующие значения: 4×3, 7×4, 11×5, ...

В общем случае нелинейному уравнению $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 0$ $(a_n = -ia'_n)$ соответствует матричное уравнение вида

$$a_k \beta_{ij}^k \varphi^j = 0, \tag{15}$$

где $k = 1...n, i = 1... \sum_{l=1}^{n-2} l+1, j = 1 \div (n-1)$. Перестановочные соотношения для матриц β_i любого ранга удовлетворяют (14). Таким образом, мы получаем набор прямоугольных матриц, близких по своим свойствам алгебрам Клиффорда.

Наряду с квадратичными формами могут быть рассмотрены формы, содержащие слагаемые с более высокими степенями. Приведем пример кубичной формы:

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 0 \to \{am + bm + cn + dn = 0, an + bn + cq + dp = 0,$$

$$aq + bp + cm + dm = 0, ap + br + cs + df = 0, ar + bq + cf + ds = 0,$$

$$as + bs + ct + dt = 0, at + bg + cp + dr = 0, af + bf + cg + dg = 0,$$

$$ag + bt + cr + dq = 0\} \text{ при } (r = -(q+p), s = -2m, t = -2n, f = m, g = n).$$

$$\left\{ a \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + c \begin{bmatrix} 0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} g \\ f \\ t \\ s \\ r \\ p \\ q \\ n \\ m \end{bmatrix} = 0. \qquad (16)$$

Аналогичным образом могут быть построены матричные уравнения для кубичных форм с бóльшим числом слагаемых. Если для квадратичных форм размерность матриц составляет $2^{(n-2)}$, то для кубичных $3^{(n-2)}$. В общем случае для форм

$$a_1^r + a_2^r + ... + a_n^r \qquad (17)$$

размерность квадратичных матриц составляет $r^{(n-2)}$. То есть возникает обширный класс матриц, обощающих алгебру Клиффорда. Предложенный метод линеаризации дает возможность их конкретного построения. На основе этого метода могут рассматриваться и более сложные и неоднородные формы. Например:

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 + a_{n+1}^2 = 0,\ (a_{n+1} = -ia'_{n+1}) \to$$
$$\{a_1 m_1 + ... + a_n m_n - a'_{n+1} m_1 = 0, a_1 m_2 - a_2 m_1 + a'_{n+1} m_2 = 0, \tag{18}$$
$$..., a_1 m_n - a_n m_1 + a'_{n+1} m_n = 0, a_2 m_3 - a_3 m_2 = 0, a_2 m_4 - a_4 m_2 =$$
$$= 0, ..., a_{n-1} m_n - a_n m_{n-1} = 0\},$$

где $\forall m_1, m_2, ..., m_n \in D_f$.

$$ab + bc + ca = 0 \to \{+am + an + bn = 0, +ap + cp + cn = 0, \tag{19}$$
$$bm + bp + cm = 0\} \text{ при } (m + n + p = 0)$$
$$\left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \end{bmatrix} = 0.$$

$$a^2 + b^2 + c^3 = 0 \to \{am + bn + c(m^2 - n^2) = 0, an - bm + c2mn = 0\} \tag{20}$$
$$\left\{ a \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} n & m \\ (m+n) & -(m+n) \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = 0.$$

$$2(ac + bd) = 0 \to \{am + bm - bn + cn = 0, an - ap + bp + dn = 0,$$
$$ar + cp + dp - dr = 0, br - cm + cr + dm = 0\}$$
$$\left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \right.$$
$$\left. + d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \\ r \end{bmatrix} = 0. \tag{21}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 \to \{am + bn - cp = 0, an - bp + cm = 0, ap - bm - cn = 0\}$$

$$\left\{a\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&-1&0\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}m\\n\\p\end{bmatrix}=0. \qquad (22)$$

$$a^3+4b^3+c^2=0,(c=-ic')\rightarrow\{a(2m^5-m^2n^3)+b(2n^5+11m^3n^2)+$$

$$+c'(n^3-2m^3)=0,a(-m^5+14m^2n^3)+b(2n^5+2m^3n^2)+c'(m^3+n^3)=0\}$$

$$\left\{a\begin{bmatrix}2&-1\\-1&14\end{bmatrix}m^2+b\begin{bmatrix}11&2\\2&2\end{bmatrix}n^2+c\begin{bmatrix}-2i&i\\i&i\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}m^2&0\\0&n^2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}=0. \qquad (23)$$

$$a^2+b^2+ab+c^2=0,(c=-ic')\rightarrow\{a(m-n)+b(2m+n)+c'(m+2n)=0,$$

$$a(2m+n)+b(m+2n)+c'(2m+n)=0\}$$

$$\left\{a\begin{bmatrix}-1&1\\1&2\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}2i&i\\i&2i\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}n\\m\\p\end{bmatrix}=0. \qquad (24)$$

$$a^2b+b^2c+c^2d+d^2a=0\rightarrow\{am-bn+dp=0,an+cm=0,bp+cn-dm=0\}$$

$$\left\{a\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}m\\n\\p\end{bmatrix}=0. \qquad (25)$$

Приведенные примеры показывают эффективность метода линеаризации и широту его возможных применений. Каждой нелинейной форме ставится в соответствие линейная система, записанная через определенные матрицы. Особый интерес представляют полученные обобщения алгебр Клиффорда. Здесь возникает новая нетривиальная область исследований.

Автор выражает благодарность Л. А. Шелепину за обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Захеди Р. А. Препринт ФИАН N 36, М., 1996.

[2] Захеди Р. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 3-4, 79 (1997).

[3] Картан Э. Теория спиноров. М., ГИТТЛ, 1947.

[4] Кириллов А. А. Элементы теории представлений. М., Наука, 1972.

Поступила в редакцию 25 марта 1997 г.