УДК 537.8

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ТОКОВ В ФЕРРОМАГНИТНОЙ СРЕДЕ

М. А. Микаэлян

Показано, что внутри изотропного ферромагнетика сила отталкивания двух антипараллельных токов в пределе бесконечно больших расстояний между ними принимает конечное значение, отличное от нуля. То есть в указанном пределе сила перестает спадать с расстоянием.

В работе исследовано магнитостатическое взаимодействие двух одинаковых по величине антипараллельных токов внутри изотропной ферромагнитной среды. Характеристическое свойство такой среды – это ограниченность снизу возможных значений модуля индукции: $B \geq B_0$, где B_0 – модуль спонтанной индукции при $\mathbf{H} = 0$. Соответственно, материальное уравнение (МУ) такой изотропной среды при малых полях (с точностью до линейных по $\mathbf{H}$ членов) имеет вид

$$\mathbf{B} = B_0\mathbf{H}/H + \mu\mathbf{H} \tag{1}$$

($B_0 > 0$, $0 \leq \mu \leq \infty$). Это соотношение, однако, будет использовано ниже в качестве МУ во всем диапазоне изменения $\mathbf{H}$. Основания для этого следующие. Во-первых, качественный вид картины поля определяется лишь фактом $B \geq B_0 > 0$, отраженным в (1); во-вторых, нас будет интересовать взаимодействие токов главным образом в пределе больших расстояний между ними, а в этом пределе оно определяется асимптотикой МУ при малых H, то есть соотношением (1)[1].

[1]Ранее [1, 2] применительно к случаю электростатики было показано, что взаимодействие зарядов в пределе больших (малых) расстояний между ними определяется асимптотикой МУ при малых (больших) полях. Обоснование этого утверждения легко переносится на случай взаимодействия токов в магнитостатике.

Магнитное поле постоянных токов определяется уравнениями

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = (4\pi/c)\mathbf{j},\ \mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \tag{2}$$

в которых $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ связаны МУ (1), а $\mathbf{j}$ дается выражением

$$\mathbf{j} = \mathbf{e}_z I[\delta(x + a/2, y) - \delta(x - a/2, y)], \tag{3}$$

где I – абсолютная величина обоих токов, a – расстояние между ними, $\mathbf{e}_z$ – единичный вектор оси z.

С математической точки зрения сформулированная задача эквивалентна задаче об электростатическом взаимодействии двух разноименно заряженных нитей в среде сегнетоэлектрического типа, для которой МУ имеет вид[2]

$$\mathbf{E} = E_0\mathbf{D}/D + \mathbf{D}/\epsilon \tag{4}$$

($E_0 > 0,\ 0 < \epsilon \le \infty$); поле определяется уравнениями

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = 0,\ \mathrm{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho, \tag{5}$$

в которых $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ связаны МУ (4), а ρ дается выражением

$$\rho = \kappa[\delta(x + a/2, y) - \delta(x - a/2, y)], \tag{6}$$

где κ – абсолютная величина линейной плотности заряда на нитях, a – расстояние между ними. Поясним сказаное. Пусть мы имеем решение интересующей нас магнитной задачи. Введем формально два векторных поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$, определив их соотношениями

$$\mathbf{E} \equiv [\mathbf{B}\mathbf{e}_z],\ \ \mathbf{D} \equiv [\mathbf{H}\mathbf{e}_z]; \tag{7}$$

введем также обозначения

$$1/\epsilon \equiv \mu,\ \ \kappa \equiv I/c,\ \ E_0 \equiv B_0. \tag{8}$$

[2]Среда с МУ (4) нереалистична: при достаточно малых D поперечная (относительно вектора $\mathbf{E}$) диэлектрическая проницаемость D/E принимает значения, меньшие единицы, что означает неустойчивость среды относительно флуктуаций направления вектора поляризации $\mathbf{P}$ [3]. (4) отличается от МУ реального сегнетоэлектрика заменами $\mathbf{E} \rightleftharpoons \mathbf{D}$. Среда (4) моделирует свойства физического вакуума квантовой хромодинамики [4, 5].

Подставив (1) в первое из соотношений (7) и воспользовавшись вторым из них и обозначениями (8), получим, что связь **E** и **D** по форме совпадает с (4). Далее, используя известные формулы векторного анализа, легко показать, что **E** и **D**, определяемые (7), удовлетворяют уравнениям (5), в которых ρ дается (6).

Указанная задача электростатики рассматривалась в работе [5]. Характеристической особенностью ее решения является локализация силовых линий индукции **D** в конечной области пространства, напоминающей по форме "мешок" (рис. 1); эта особенность решения – следствие ограниченности снизу возможных значений модуля поля $E \geq E_0$ (см. (4)). Действительно, циркуляция поля вдоль силовых линий индукции, идущих от одной заряженной нити к другой, с учетом МУ (4) равна

$$\int \mathbf{E}d\mathbf{l} = E_0 L + (1/\epsilon)\int \mathbf{D}d\mathbf{l},$$

где L – длина силовой линии индукции. Поскольку эта величина, согласно первому из уравнений (5), одна и та же для всех силовых линий индукции, то возможные значения L не могут быть сколь угодно большими; таким образом, они ограничены сверху, что и означает пространственную локализацию индукции **D** внутри "мешка". Всюду вне "мешка" $\mathbf{D} \equiv 0$ и, согласно МУ (4), $E \equiv E_0$. Из последнего равенства вытекает, что силовые линии **E** суть прямые: кривизна линий произвольного единичного векторного поля **t** дается выражением [6] $k = |[\mathbf{t}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{t}]|$; подставив сюда $\mathbf{t} = \mathbf{E}/E_0$, с учетом первого из уравнений (5) получим $k = 0$. Из равенства тангенциальных компонент поля на границе "мешка" следует, как нетрудно показать, что силовые линии **E** подходят к ней извне под нулевым углом, то есть являются ее касательными (рис. 1).

Решение интересующей нас магнитной задачи может быть получено по формулам (7), которые после векторного умножения на $\mathbf{e}_z$ принимают вид

$$\mathbf{B} = [\mathbf{e}_z\mathbf{E}],\ \mathbf{H} = [\mathbf{e}_z\mathbf{D}]. \tag{9}$$

Согласно первой из формул (9) силовые линии **B** ортогональны силовым линиям **E** электрического аналога задачи; они показаны на рис. 2 (левый ток направлен "на нас", правый – "от нас"; ср. рис. 1). Согласно второй из формул (9) пространственную локализацию внутри "мешка" испытывает поле **H**; всюду вне "мешка" $\mathbf{H} \equiv 0$ и, с учетом МУ (1), $B \equiv B_0$.

Отметим частный случай $\mu = 0$, когда МУ (1) имеет вид

$$\mathbf{B} = B_0\mathbf{H}/H. \tag{10}$$

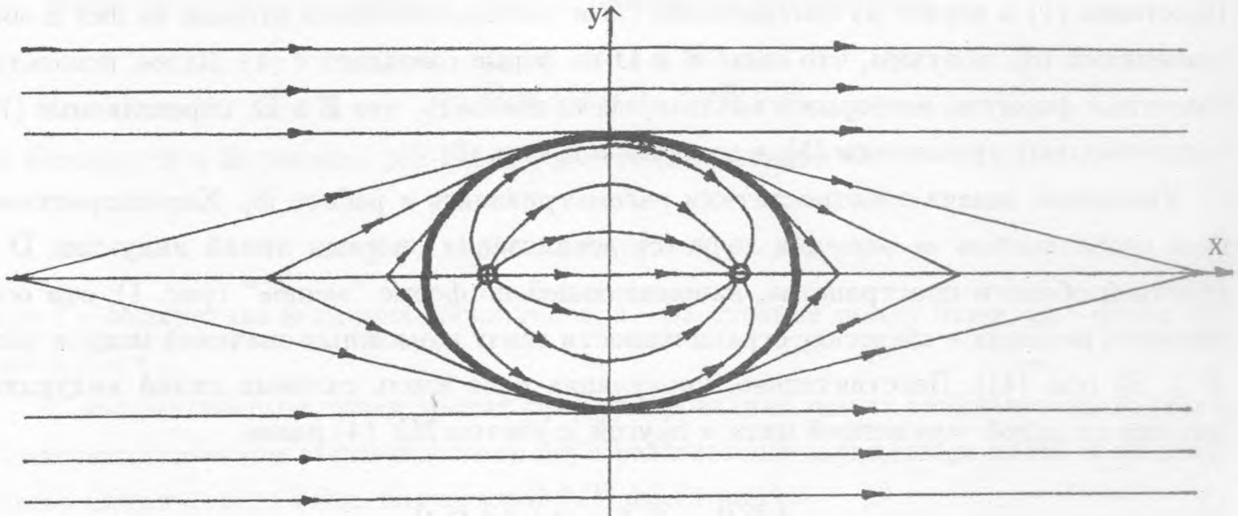

Рис. 1. *Картина силовых линий поля* **E** *двух разноименно заряженных нитей в изотропной среде сегнетоэлектрического типа. Индукция* **D** *локализована внутри "мешка", граница которого обозначена жирной линией. Всюду вне "мешка"* $\mathbf{D} \equiv 0, E \equiv E_0$ *и силовые линии* **E** *суть прямые.*

В этом случае решению задачи отвечает превращение "мешка" в сингулярную область поля, которой на рис. 2 отвечает отрезок оси x $[-a/2, a/2]$; аналитическое, решение имеет вид

$$\mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_y, \mathbf{H} = \begin{cases} (4\pi/c)I\delta(y)\mathbf{e}_y & \text{при } |x| \le a/2 \\ 0 & \text{при } |x| > a/2 \end{cases} \tag{11}$$

($\mathbf{e}_y$ – единичный вектор оси y), что проверяется прямой подстановкой (11) в уравнения (2). Сила взаимодействия токов определяется производной по расстоянию между ними от величины, объемная плотность которой равна $(1/4\pi)\int \mathbf{B}d\mathbf{H}$ [7]; для силы отталкивания двух коллинеарных токов, приходящейся на единицу их длины, имеем

$$f = \frac{d}{da}\int dxdy(1/4\pi)\int\limits_0^{\mathbf{H}} \mathbf{B}(\mathbf{H}')d\mathbf{H}'. \tag{12}$$

Подставим сюда (10) и проинтегрируем по $\mathbf{H}$; в получившееся выражение подставим значение $\mathbf{H}$, определяемое (11), и, проинтегрировав по x, y, получим

$$f = IB_0/c. \tag{13}$$

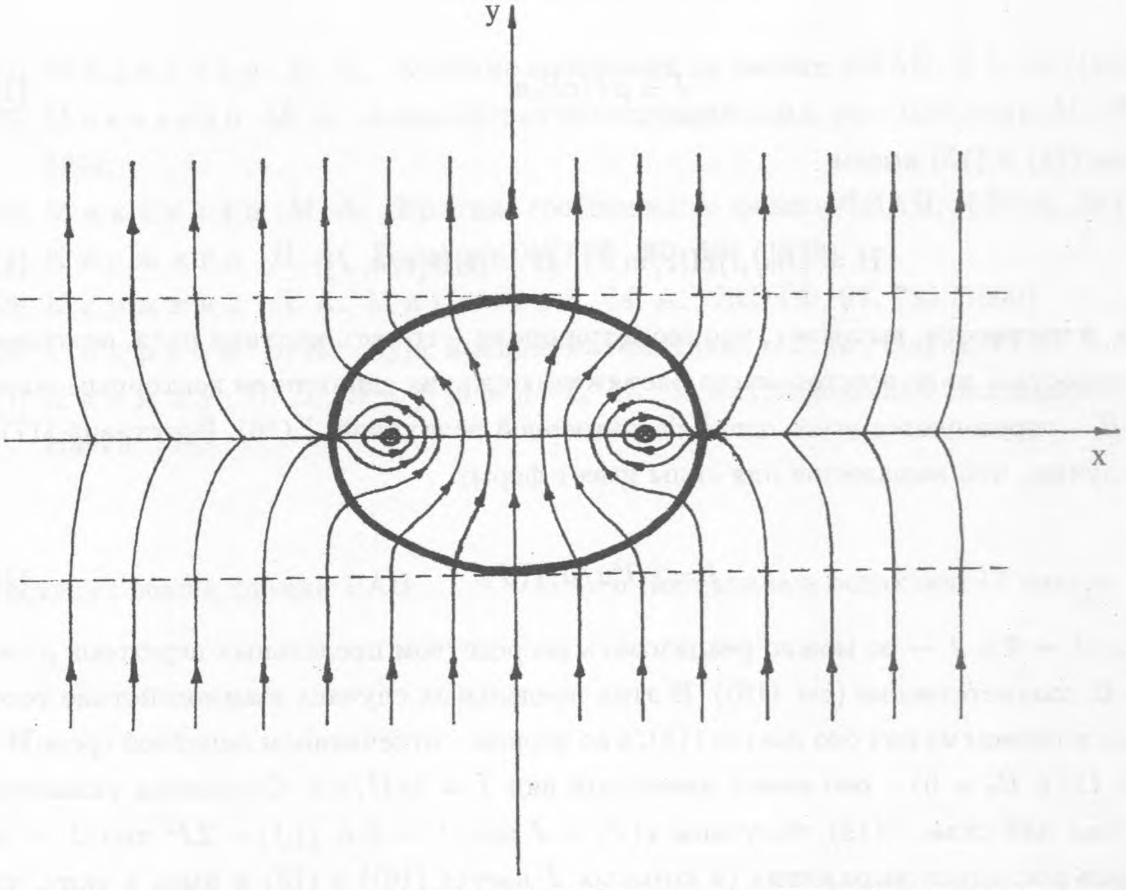

Рис. 2. *Картина силовых линий индукции* $\mathbf{B}$ *двух антипараллельных токов в изотропном ферромагнетике. Поле* $\mathbf{H}$ *локализовано внутри "мешка", граница которого обозначена жирной линией. Всюду вне "мешка"* $\mathbf{H} \equiv 0$, $B \equiv B_0$.

Таким образом, антипараллельные токи в среде с МУ (10) отталкиваются с силой, не зависящей от расстояния между ними.

Обратимся к общему случаю произвольного μ. Приведем уравнения поля (2), в которых $\mathbf{j}$ дается (3), вместе с МУ (1) к безразмерному виду посредством замен

$$\mathbf{H} \to \mu\mathbf{H}/B_0,\ \mathbf{B} \to \mathbf{B}/B_0,\ \mathbf{r} \to \mathbf{r}/a \tag{14}$$

($\mathbf{r} = \{x, y, z\}$). После этого указанные уравнения остаются прежними по форме, а отличие сводится к заменам в них параметров задачи на безразмерные величины:

$$I/c \to J,\ a \to 1,\ B_0 \to 1,\ \mu \to 1, \tag{15}$$

где

$$J \equiv \mu I/cB_0 a. \tag{16}$$

С учетом (14) и (15) имеем

$$\mathbf{H} = (B_0/\mu)\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}/a, J),\ \mathbf{B} = B_0\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}/a, J). \tag{17}$$

Отсюда, в частности, вытекает, что геометрия поля – то есть картина поля, описываемая с точностью до ее всестороннего растяжения-сжатия единичным векторным полем $\mathbf{t} = \mathbf{H}/H$ – определяется всего одной безразмерной величиной J (16). Подставив (17) в (12), получим, что выражение для силы имеет форму

$$f = (B_0^2 a/\mu)\chi(J). \tag{18}$$

Пределы $J \to 0$ и $J \to \infty$ можно реализовать посредством предельных переходов $\mu \to 0$ и $B_0 \to 0$, соответственно (см. (16)). В этих предельных случаях взаимодействие токов известно: в первом из них оно дается (13), а во втором – отвечающем линейной среде $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ (см. (1) с $B_0 = 0$) – оно имеет известный вид $f = 2\mu I^2/c^2 a$. Сравнивая указанные выражения для силы с (18), получаем $\chi(J) = J$ при $J \to 0$ и $\chi(J) = 2J^2$ при $J \to \infty$. Подставив последние выражения (в которых J дается (16)) в (18) и имея в виду, что пределы $J \to 0$ и $J \to \infty$ эквивалентны, соответственно, неравенствам $a \gg \mu I/cB_0$ и $a \ll \mu I/cB_0$ (см. (16)), окончательно получим

$$f = \begin{cases} IB_0/c & \text{при}\, a \gg \mu I/cB_0 \\ 2\mu I^2/c^2 a & \text{при}\, a \ll \mu I/cB_0. \end{cases}$$

В заключение подчеркнем, что ограниченность снизу возможных значений модуля индукции ($B \geq B_0 > 0$), отраженная в МУ (1), – это характеристическое свойство изотропного ферромагнетика. Именно оно обусловливает локализацию в конечной области пространства магнитного поля $\mathbf{H}$ двух антипараллельных токов. В пределе больших расстояний между ними ($a \gg \mu I/cB_0$) величина J, определяющая геометрию поля, стремится к нулю и возникает ситуация, эквивалентная случаю $\mu = 0$, когда область локализации магнитного поля приобретает квазиодномерную структуру и сила отталкивания токов перестает зависеть от расстояния между ними.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект N 96–02–16256–а).

ЛИТЕРАТУРА

[1] М и к а э л я н М. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 3, 15 (1991).

[2] М и к а э л я н М. А. Автореферат диссертации канд. физ.-мат. наук. М., ИОФАН, 1994.

[3] М и к а э л я н М. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 5 – 6, 30 (1993).

[4] К и р ж н и ц Д. А. Письма в ЖЭТФ, **30**, 624 (1979).

[5] К и р ж н и ц Д. А., М и к а э л я н М. А. ЖЭТФ, **97**, 795 (1990).

[6] С м и р н о в В. И. Курс высшей математики. т. 2, М., Наука, 1974.

[7] Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Наука, 1982.

Институт общей физики РАН Поступила в редакцию 17 января 1997 г.