

УДК 537.533

РАСЧЕТ КОМПЛЕКСНЫХ СПЕКТРОВ ПЛАЗМЕННОГО УСИЛИТЕЛЯ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ПОПЕРЕЧНЫМИ ПРОФИЛЯМИ ПУЧКА И ПЛАЗМЫ

М. В. Кузелев, Р. В. Романов, А. А. Рухадзе

Рассчитаны комплексные спектры линейных электромагнитных волн в круглом металлическом волноводе с неоднородным в поперечном направлении заполнением электронным пучком и плазмой в сильном продольном внешнем магнитном поле. Рассмотрены наиболее важные с экспериментальной точки зрения поперечные профили – тонкие трубки с гауссовым распределением. Расчеты проведены для двух случаев электромагнитного взаимодействия пучка с плазмой – одночастичного и коллективного эффектов Черенкова в постановке граничной задачи.

Расчеты комплексных линейных спектров электромагнитных волн в плазменно-пучковых волноводах имеют важное значение при интерпретации и постановке современных экспериментов в области сильноточной релятивистской плазменной СВЧ электроники [1]. Линейные расчеты сравнительно не трудоемки, а значит дают возможность охватить и просмотреть большой объем вариантов и параметров плазменно-пучковых систем. Проведенные в ряде работ расчеты базировались или на модели волновода с бесконечно тонкими пучком и плазмой в бесконечно сильном внешнем продольном магнитном поле [2, 3] или на модели плазмы и пучка с резкими границами, как в бесконечном магнитном поле [4], так и поле конечной величины [5]. Было установлено, что поперечная геометрия пучка и плазмы и значение внешнего магнитного поля могут заметно влиять на структуру комплексных спектров. При интерпретации же экспериментов преимущественно используется модель бесконечно тонких пучка и плазмы как наиболее простая [6, 7]. Вместе с тем, экспериментальное измерение распределения плотности плазмы по радиусу показало, что оно является довольно сложным [7] и

лишь приближенно аппроксимируется упомянутыми выше простыми моделями. Поэтому представляется важным проведение расчетов комплексных спектров для близких к экспериментальному поперечных профилей пучка и плазмы и сравнение их результатов с результатами, полученными ранее на простых моделях. В качестве объектов для сравнения здесь выбраны известные зависимости от частоты комплексных коэффициентов усиления плазменных волн в волноводе с бесконечно тонким пучком и плазмой, использованные при обсуждении экспериментов [6 – 8]. В одной из последующих работы предполагаем провести соответствующее сравнение и с моделью плазмы и пучка с резкими границами.

Постановка задачи и метод расчета спектров

Рассмотрим однородный в продольном направлении цилиндрический волновод кругового сечения, заполненный поперечно-неоднородными пучком и плазмой и помещенный во внешнее бесконечно сильное продольное магнитное поле. Ограничимся исследованием только азимутально-симметричных возмущений в таком волноводе.

Продольная диэлектрическая проницаемость полностью замагниченного пучка и плазмы в волноводе определяется известным выражением [9]

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} P_p(r) - \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)} P_b(r). \quad (1)$$

Здесь ω – частота, k_z – продольное волновое число, ω_p – ленгмюровская частота электронов плазмы, ω_b – ленгмюровская частота электронов пучка, u – скорость электронов пучка, $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$.

Функции $P_p(r)$ и $P_b(r)$ задают форму поперечных профилей соответственно плазмы и пучка. В настоящее время в экспериментах наиболее интенсивно изучаются трубчатые плазма и пучок. Простейшей их моделью является модель бесконечно тонких плазмы и пучка, в которой используются следующие формы поперечных профилей:

$$P_{p,b} = \Delta_{p,b} \delta(r - r_{p,b}). \quad (2)$$

Здесь $\Delta_{p,b}$ имеют смысл толщин стенок плазменной и пучковой трубок, а $r_{p,b}$ – их радиусы.

Анализ экспериментальных данных [7] свидетельствует, что вместо (2) более подходящими являются следующие гауссовы формы поперечных профилей:

$$P_{p,b} = \exp(-(r - r_{p,b})^2 / \delta_{p,b}^2), \quad (3)$$

где $r_{p,b}$ – средние радиусы плазменной и пучковой трубок, а $\delta_{p,b}$ – некоторые характеристики их толщин.

Ставя задачу сравнения дисперсионных свойств плазменно пучковых систем с поперечными профилями (2) и (3), следует уточнить условия сравнения. Во-первых, предположим, что средние радиусы $r_{p,b}$ в (2) и в (3) одинаковы. Во-вторых, считаем, что погонные плотности частиц в обоих случаях равны. Последнее условие выражается равенством

$$\int_0^R \exp(-(r - r_{p,b})^2/\delta_{p,b}^2) r dr = \Delta_{p,b} r_{p,b}. \quad (4)$$

Здесь R – радиус волновода. Как будет видно из дальнейшего, условие (4), при всей его очевидности, не обеспечивает наилучшего согласования результатов расчета для двух рассматриваемых моделей.

Из уравнений поля с диэлектрической проницаемостью (1) для симметричных волноводных мод E -типа следует одно уравнение для продольной компоненты электрического поля E_z [9]:

$$\frac{d^2 E_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_z}{dr} - \kappa^2 \epsilon E_z = 0, \quad (5)$$

где $\kappa^2 = k_z^2 - \omega^2/c^2$. Уравнение (5) решается с граничными условиями на металлической стенке волновода и на его оси:

$$E_z(r = R) = 0, \quad \frac{dE_z}{dr}(r = 0) = 1. \quad (6)$$

Значение продольного поля на оси волновода задаем произвольным образом, для определенности $E_z(r = 0) = 1$.

Для поперечного профиля (2) краевая задача (5), (6) решается аналитически. Дисперсионное уравнение для этого случая имеет известный вид [10]

$$\begin{aligned} \left(\omega^2 - \omega_p^2 \frac{\kappa^2}{k_{\perp p}^2} \right) \left[(\omega - k_z u)^2 - \omega_b^2 \gamma^{-3} \frac{\kappa^2}{k_{\perp b}^2} \right] = \\ = \Theta \omega_p^2 \frac{\kappa^2}{k_{\perp p}^2} \omega_b^2 \gamma^{-3} \frac{\kappa^2}{k_{\perp b}^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$k_{\perp p}^2 = \left\{ r_p \Delta_p I_1^2(\kappa r_p) \left[\frac{K_1(\kappa r_p)}{I_1(\kappa r_p)} - \frac{K_1(\kappa R)}{I_1(\kappa R)} \right] \right\}^{-1} \quad (8)$$

поперечные волновые числа поверхностных плазменной и пучковой волн, а

$$\Theta = \begin{cases} \frac{I_1(\kappa r_b)K_1(\kappa r_p)I_1(\kappa R) - K_1(\kappa R)I_1(\kappa r_p)}{I_1(\kappa r_p)K_1(\kappa r_b)I_1(\kappa R) - K_1(\kappa R)I_1(\kappa r_b)}, & r_b \leq r_p \\ \frac{I_1(\kappa r_p)K_1(\kappa r_b)I_1(\kappa R) - K_1(\kappa R)I_1(\kappa r_b)}{I_1(\kappa r_b)K_1(\kappa r_p)I_1(\kappa R) - K_1(\kappa R)I_1(\kappa r_p)}, & r_b \geq r_p \end{cases} \quad (9)$$

коэффициент связи между этими волнами.

Уравнение (7) можно разрешить (численно) при действительной частоте ω относительно волнового числа k_z . Мнимая часть волнового числа является коэффициентом усиления волн в линейной теории. Именно зависимость этого коэффициента усиления от частоты и есть главный предмет изучения настоящей работы.

В случае поперечного профиля (3) дисперсионное уравнение в явном виде получить нельзя. Приходится определять зависимость волнового числа от частоты непосредственно из краевой задачи (5), (6). Для решения этой задачи на собственные значения в данной работе выбран метод "стрельбы".

Суть метода состоит в следующем. Фиксируется некоторая частота ω и берется произвольное k_z . Далее решается задача Коши для уравнения (5) в области $r > 0$ с дополнительными условиями только при $r = 0$. Если найденное при этом решение E_z обращается в ноль при $r = R$, то взятое k_z и есть искомое волновое число. Если же E_z при $r = R$ в ноль не обращается, то берется другое пробное k_z и так далее. Прodelывая данную процедуру для разных частот, можно получить зависимость $k_z(\omega)$, то есть комплексный спектр.

Применительно к рассматриваемой задаче реализация метода "стрельбы" связана с определенными сложностями. Дело в том, что в некоторой области частот, там, где имеется усиление волн, волновые числа комплексны (именно эта область частот и представляет для нас главный интерес). Поэтому k_z приходится подбирать не на действительной оси, а на комплексной плоскости. Далее, при комплексных k_z комплексны и функции E_z . То есть уравнение (5) является на самом деле системой двух уравнений относительно функций $Re E_z$ и $Im E_z$, а граничное условие сводится к одновременному обращению в ноль этих двух функций при $r = R$. Кроме того, в случае профилей (3) с малыми $\delta_{p,b}$ для численного решения уравнения (5) приходится использовать либо сильно неравномерную, либо слишком густую разностную сетку.

Сравнение комплексных спектров

При проведении расчетов мы исходили из параметров действующей экспериментальной установки [7]. Рассматривался круглый металлический волновод с радиусом $R =$

1,8 см с тонкими трубчатым пучком и плазмой. Средний радиус пучка $r_b = 0,65$ см фиксировался, фиксировались также ток пучка $I_b = 2$ кА и релятивистский фактор электронов пучка $\gamma = 2$. Брались два значения среднего радиуса плазмы $r_p = 0,65$ см и $r_p = 1,1$ см и два значения плазменной частоты $\omega_p = 25 \cdot 10^{10}$ рад/с и $\omega_p = 35 \cdot 10^{10}$ рад/с. При использовании модели бесконечно тонких плазмы и пучка (профиль (2)) фиксировались значения $\Delta_p = 0,1$ см и $\Delta_b = 0,1$ см (именно эти значения взяты в [7] при интерпретации эксперимента). При использовании модели (3) толщина пучка δ_b выбиралась в соответствии с равенством (4). Что касается толщины плазмы δ_p , то она варьировалась таким же образом. Поясним, что варьируя только толщину плазмы, мы исходили из того, что плотность плазмы существенно выше плотности пучка, поэтому роль плазмы при формировании электромагнитных свойств волновода значительнее. Некоторые тонкие эффекты, обусловленные поперечной геометрией пучка, рассмотрены в [4].

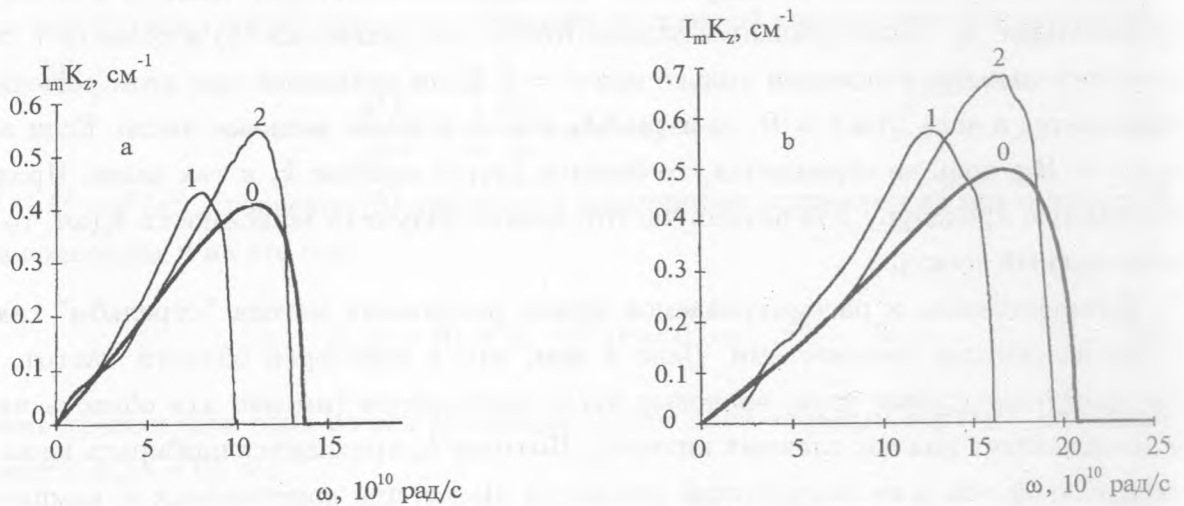


Рис. 1. Зависимости коэффициентов усиления от частоты при одночастичном эффекте Черенкова для $\omega_p = 25 \cdot 10^{10}$ рад/с (а), $35 \cdot 10^{10}$ рад/с (б) и $r_p = 0,65$ см. 0 – дельтаобразная плазма; 1 – толщина плазмы 0,05 см; 2 – толщина плазмы 0,08 см (а); 0,07 см (б).

На рис. 1 – 3 представлены зависимости от частоты ω коэффициентов усиления $|Imk_z(\omega)|$. Рис. 1а относится к случаю $\omega_p = 25 \cdot 10^{10}$ рад/с и $r_p = 0,65$ см. При этих параметрах реализуется типично одночастичный черенковский режим усиления [7, 10]. Жирной кривой (кривая 0) показан результат расчета в модели бесконечно тонких пучка и плазмы. Кривые 1 и 2 получены с учетом конечности толщин плазмы и пучка. Для

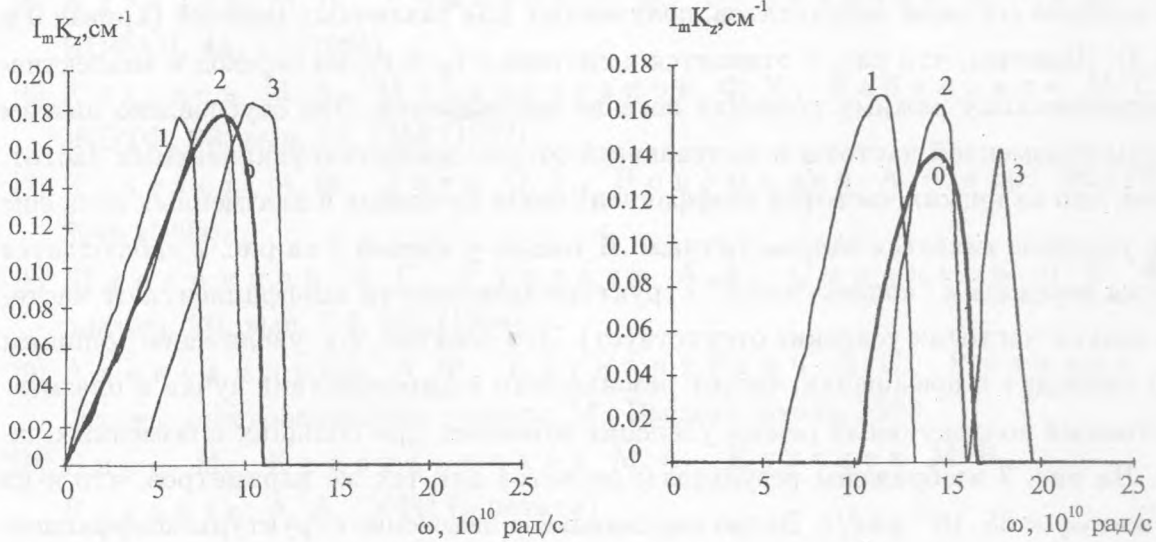


Рис. 2. Зависимости коэффициентов усиления от частоты при переходе от одночастичного эффекта Черенкова к коллективному для $\omega_p = 25 \cdot 10^{10}$ рад/с и $r_p = 1,1$ см. 0 - дельтаобразная плазма; толщина плазмы 0,05 см (1), 0,07 см (2), 0,1 см (3).

Рис. 3. Зависимости коэффициентов усиления от частоты при коллективном эффекте Черенкова для $\omega_p = 35 \cdot 10^{10}$ рад/с и $r_p = 1,1$ см. 0 - дельтаобразная плазма; толщина плазмы 0,05 см (1), 0,07 см (2), 0,1 см (3).

кривой 1 $\delta_p = 0,05$ см. При таком δ_p равенство (4) выполнено точно. Однако кривые 1 и 0 все же не совпадают: максимумы коэффициентов усиления примерно одинаковы, но размеры полос усиливаемых частот различаются примерно на 30%. При увеличении δ_p до 0,08 см (кривая 2) наблюдается практическое совпадение размеров полос усиливаемых частот, но различаются максимумы коэффициентов усиления. Заметим, что при $\delta_p = 0,08$ см равенство (4) нарушено: слева стоит $9,2 \cdot 10^{-2}$ см², а справа $6,5 \cdot 10^{-2}$ см².

На рис. 1b изображен случай $\omega_p = 35 \cdot 10^{10}$ рад/с при прежнем значении $r_p = 0,65$ см. Это опять чисто одночастичный режим усиления, и прослеживаются те же закономерности, что и на рис. 1.

На рис. 2 изображен случай $r_p = 1,1$ см и $\omega_p = 25 \cdot 10^{10}$ рад/с. Жирная кривая 0 получена в приближении бесконечно тонких пучка и плазмы; кривые 1, 2 и 3 учитывают конечную их толщину. В случае кривой 1 левая часть (4) несколько меньше правой; в случае кривой 2 они равны; в случае кривой 3 левая часть (4) превосходит правую.

Видно, что как раз при той толщине плазмы, когда и следует этого ожидать, наблюдается хорошее согласие результатов, полученных для различных моделей (кривая 0 и кривая 2). Заметим, что рис. 2 относится к системе с $r_p > r_b$, но переход к коллективному черенковскому режиму усиления пока не наблюдается. Это обусловлено низким значением плазменной частоты и вытекающей отсюда малостью усиливаемых частот. Известно, что на низких частотах коэффициент связи пучковых и плазменных волн еще велик и усиление является одночастичным. И только у кривой 3 на рис. 2 наблюдается тенденция перехода к "коллективной" структуре зависимости коэффициента от частоты (на низких частотах усиление отсутствует). Это понятно, т.к. увеличение толщины плазмы приводит к повышению частот резонансного взаимодействия пучка и плазмы.

Настоящий коллективный режим усиления возникает при больших плазменных частотах. На рис. 3 изображены результаты расчетов для тех же параметров, что и на рис. 2, но с $\omega_p = 35 \cdot 10^{10}$ рад/с. Видно кардинальное изменение структуры коэффициентов усиления и удовлетворительное (хотя и худшее, чем на рис. 2) согласие результатов расчетов, основанных на разных моделях поперечных профилей пучка и плазмы.

Подводя итоги, можно сказать, что идеального совпадения результатов расчетов СВЧ усилителя с тонкими трубчатыми пучком и плазмой, полученными с поперечными профилями в форме (2) и в форме (3), добиться не удастся. Но качественное совпадение, и очень удовлетворительное, безусловно, имеется. Тем более, что надежных экспериментальных данных относительно формы поперечных профилей (профиль (3), или профиль, использованный в [4], или нечто иное [7]) в настоящее время нет. В настоящей работе, как нам кажется, мы в достаточной степени обосновали, что модель бесконечно тонких пучка и плазмы вполне достаточна для качественного, а в большинстве ситуаций и количественного описания результатов работ по плазменной СВЧ электронике.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кузелев М. В., Рухадзе А. А., Стрелков П. С., Шкварунец А. Г. Физика плазмы, **13**, вып. 11, 1370 (1987).
- [2] Кузелев М. В., Мухаметзянов Ф. Х., Шкварунец А. Г. Физика плазмы, **9**, вып. 6, 1137 (1983).
- [3] Александров А. Ф., Кузелев М. В., Халилов А. Н. ЖЭТФ, **93**, вып. 5(11), 1714 (1987).

- [4] Vira M. SPEEE, **28**, 269 (1996).
- [5] Кузелев М. В., Романов Р. В., Селиванов И. А. и др. Труды ИОФАН, **45**, 17 (1994).
- [6] Кузелев М. В., Мухаметзянов Ф. Х., Рабинович М. С. и др. ЖЭТФ, **83**, вып. 10, 1358 (1982).
- [7] Кузелев М. В., Лоза О. Т., Пономарев А. В. и др. ЖЭТФ, **109**, 2048 (1996).
- [8] Шкварунец А. Г., Рухадзе А. А., Стрелков П. С. Физика плазмы, **20**, вып. 7-8, 682 (1994).
- [9] Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы. М., Высшая школа, 1988.
- [10] Биро М., Красильников М. А., Кузелев М. В., Рухадзе А. А. УФН (в печати).

Институт общей физики РАН

Поступила в редакцию 28 марта 1997 г.