УДК 530.1

О СВЯЗИ МЕТОДОВ ТЕОРИИ КОЛЕЦ С ГРУППОВЫМ ПОДХОДОМ

Р. А. Захеди

Рассматривается взаимосвязь развитого ранее аппарата теории колец с групповым подходом. Показано, что в результате линеаризации нелинейных форм, соответствующих инвариантам групповых преобразований, возникают системы уравнений, ковариантные к этим группам, в частности, уравнения Дирака, Максвелла, поля тяготения.

В работах [1, 2] был рассмотрен метод линеаризации, основанный на теории колец. Для ряда нелинейных форм, в частности, форм вида

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \mathrm{const}, \; n \geq 3 \tag{1}$$

были построены системы линейных уравнений

$$x_i \alpha^i_{jk} \phi^k = 0, \tag{2}$$

сохраняющих эти формы, причем возникали как квадратичные, так и прямоугольные матрицы α^i_{jk}.

Здесь важно подчеркнуть прямую связь ряда форм типа (1) с теорией групп. Так, формы (1) являются инвариантами ортогональных (и псевдоортогональных при комплексных x_i) групп. И следующие из них линейные уравнения (2) должны быть ковариантными относительно соответствующей группы. В данной работе будет рассмотрена целая совокупность уравнений, относящихся к одной форме, одной группе, в отличие от [2], где были получены лишь простейшие уравнения для разных значений n, т.е. разных групп $0(n)$. Применяя аппарат теории колец [1], для конкретной формы можно получить, в принципе, бесконечный набор соотношений симметрии, из которых следуют системы

$$x_1\varphi_5 - x_2\varphi_6 - x_3\varphi_7 - x_4'\varphi_4 = 0,\ x_1\varphi_6 + x_2\varphi_5 + x_3\varphi_8 - x_4'\varphi_3 = 0, \tag{6}$$

$$x_1\varphi_7 - x_2\varphi_8 + x_3\varphi_5 + x_4'\varphi_2 = 0,\ x_1\varphi_8 + x_2\varphi_7 - x_3\varphi_6 + x_4'\varphi_1 = 0,$$

где

$$\begin{vmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_4' \\ x_2 & x_1 & 0 & x_3 & 0 & 0 & x_4' & 0 \\ x_3 & 0 & x_1 & -x_2 & 0 & -x_4' & 0 & 0 \\ 0 & -x_3 & x_2 & x_1 & -x_4' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_4' & x_1 & -x_2 & -x_3 & 0 \\ 0 & 0 & -x_4' & 0 & x_2 & x_1 & 0 & x_3 \\ 0 & x_4' & 0 & 0 & x_3 & 0 & x_1 & -x_2 \\ x_4' & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_3 & x_2 & x_1 \end{vmatrix} = 0 \equiv \left(\sum_{i=1}^{4} x_i = 0\right). \tag{6a}$$

В матричной форме эта система имеет вид

$$\left\{ x_1 \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&-1 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&-1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&-1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&-1&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + x_3 \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&-1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&-1&0 \\ 0&-1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&-1&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} i&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&i&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&-i&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&-i&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&-i&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&-i&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&i&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&i \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ \varphi_8 \end{bmatrix} = 0. \tag{7}$$

Здесь матрицы [8×8] также удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\alpha_i^*\alpha_k + \alpha_k^*\alpha_i = 2\delta_{ik}, \tag{8}$$

где α_i^* – транспонированная матрица.

Аналогичный результат получается непосредственным вычислением и для следующей по сложности 12-компонентной системы.

В общем случае $4N$-компонентной системы линейных уравнений, сохраняющих форму (3), матрицы α_i размерностью $[4N \times 4N]$ можно представить в виде:

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} & & & \sigma_1 \\ & 0 & \sigma_1 & \\ & \iddots & & \\ & \sigma_1 & 0 & \\ \sigma_1 & & & \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} & & & \sigma_2 \\ & 0 & \sigma_2 & \\ & \iddots & & \\ & \sigma_2 & 0 & \\ \sigma_2 & & & \end{bmatrix},$$

$$\alpha_r = (i)^{r-3} \begin{bmatrix} & 0 & & \sigma_3 & & 0 \\ & & & & -\sigma_3 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & (-1)^r\sigma_3 \\ \sigma_3 & & & & & \\ & -\sigma_3 & & & & \\ & & \ddots & & 0 & \\ 0 & & (-1)^r\sigma_3 & & & \end{bmatrix},$$

$$\alpha_s = (i)^{s-3} \begin{bmatrix} \sigma_4 & & & & & & \\ & -\sigma_4 & & & 0 & & \\ & & -\sigma_4 & & & & \\ & & & \sigma_4 & & & \\ & & & & \sigma_4 & & \\ & & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & & (-1)^s\sigma_4 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

где

$$\sigma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

При N четном: $r = 3$, $s = 4$, выполняется (8); при N нечетном: $r = 4$, $s = 3$, справедливы соотношения:

$$\alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i = 2\delta_{ik}.$$

Полученные квадратичные матрицы удовлетворяют перестановочным соотношениям для алгебры Клиффорда. Рассматривая вместо (1) лоренц-инвариантную форму для производных (уравнение Клейна – Гордана), мы получаем в результате линеаризации целую совокупность систем релятивистских уравнений

$$\alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \phi = 0. \tag{10}$$

Как видим, развитая методика их получения и анализа существенно отличается от [4]. Согласно этой методике наряду с квадратичными матрицами и на основе их могут быть построены прямоугольные матрицы β_i, которые представляют значительный интерес с физической точки зрения.

В [2] были получены прямоугольные матрицы β_i размерностью [4×3]. Соответствующие уравнения типа (2) сохраняли форму $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ ($d = -id'$). При $d \equiv 0$ возникает уравнение, сохраняющее форму $a^2 + b^2 + c^2$:

$$\left\{ a \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \end{bmatrix} = 0. \tag{11}$$

Для трех матриц β_i выполняются перестановочные соотношения

$$\beta_i^* \beta_k + \beta_k^* \beta_i = 2\delta_{ik} \ (\beta_i[4 \times 3],\ \delta_{ik}[3 \times 3]). \tag{12}$$

При $a = \frac{\partial}{\partial y}$, $b = \frac{\partial}{\partial x}$, $c = -\frac{\partial}{\partial z}$, $m = g_x$, $n = g_y$, $p = g_z$ система (11) имеет вид

$$\frac{\partial g_z}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_z}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial g_x}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial x} = 0. \tag{13}$$

Это система уравнений для поля тяготения Ньютона [5].

Из системы (7), содержащей квадратичные матрицы и сохраняющей форму (3), может быть получена система уравнений, включающая прямоугольные матрицы

$$\left\{ x_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \right.$$

$$+\,x_3\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + x_4\left.\begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \end{vmatrix} = 0. \qquad (14)$$

Матрицы β_i, имеющие размерность [8×6] (δ_{ik} [6×6]) удовлетворяют перестановочным соотношениям (12).

При $\varphi_1 = E_x$, $\varphi_2 = E_y$, $\varphi_3 = E_z$, $\varphi_5 = B_x$, $\varphi_6 = B_y$, $\varphi_7 = B_z$ и $x_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $x_2 = -\frac{\partial}{\partial y}$, $x_3 = -\frac{\partial}{\partial z}$, $x_4' = \frac{\partial}{\partial t}$ система (14) преобразуется к виду

$$-\frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0, \ \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} + \frac{\partial E_y}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0, \ \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, -\frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0, \ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0, \ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \qquad (15)$$

Система (15) соответствует уравнениям Максвелла [6].

Аналогичным путем могут быть получены уравнения типа (2) с прямоугольными матрицами более высокого ранга. Для 4-, 8-, 12-, 16-компонентной системы уравнений их размерности составляют соответственно [4×3], [8×6], [12×9], [16×12], ... Для них также могут быть выписаны дифференциальные уравнения типа (15). Таким образом, в рамках развиваемого подхода, с одной стороны, возникает ряд известных уравнений (Дирака, Максвелла, Ньютона), с другой, он позволяет находить в явном виде и исследовать уравнения для более высоких групп, в частности, 0(5)- и 0(6)-инвариантные уравнения, представляющие интерес для ряда приложений.

Отметим, что метод не только позволяет получать системы ковариантных линейных уравнений. В принципе, оказывается возможным свести уравнение высокого порядка к уравнениям более низкого порядка, не обязательно линейным. Но и здесь отмеченная выше ковариантность сохраняет свою силу. Метод может использоваться в том случае, когда кольцевые элементы $a_1, ..., a_N$ в инвариантных формах f имеют сложную структуру. Так, они могут зависеть от других элементов $a_1 = a_1(x_1, ..., x_s), ..., a_N = a_N(x_1, ..., x_s)$, а в форме f могут присутствовать некоторые коэффициенты $A_1, ..., A_M$. Тогда получаемая в процессе линеаризации система может оказаться нелинейной относительно элементов $x_1, ..., x_s$ и т.д. Например,

$$ka^2 + b^2 + c^2 = 0 \to \{-kan + bm + c'm = 0, am + bn - c'n = 0\}, \ c = -ic',$$

$$\left\{\begin{bmatrix} 0 & -k \\ 1 & 0 \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} c\right\}\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = 0; \tag{16}$$

$$Aa^3 + Bb^3 + Dc^3 = Aabc + Bbca + Dcab \to \{Aam + Bbn + Dcp = 0,$$

$$cm + an + bp = 0, bm + cn + ap = 0\},$$

$$\left\{\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} 0 & 0 & D \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} c\right\}\begin{bmatrix} m \\ n \\ p \end{bmatrix} = 0. \tag{17}$$

Для уравнений типа

$$\det[a_{ij}] = 0, \ i, j = 1...n, \tag{18}$$

где a_{ij} – кольцевые элементы, в частном случае линейные операторы, данный метод линеаризации в принципе дает эквивалентные матричные соотношения

$$[a_{ij}][M_j] = 0. \tag{19}$$

Таким путем можно уравнения высшего порядка свести к уравнениям более низкого порядка, не обязательно линейным. Например, для уравнения

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{20}$$

при $a_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $a_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $b_1 = c\frac{\partial^2}{\partial x^2} + B\varphi$, $b_2 = \frac{\partial}{\partial t} - A\frac{\partial}{\partial x}$ соответствующая система имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}M_1 + c\frac{\partial^2}{\partial x^2}M_2 + B\varphi M_2 = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}M_1 + \frac{\partial}{\partial t}M_2 - A\frac{\partial}{\partial x}M_2 = 0. \tag{21}$$

В целом, рассмотренная взаимосвязь кольцевых и групповых методов представляется весьма перспективной; она, в частности, открывает возможности применения новых расчетных методов в ряде групповых проблем.

Автор признателен Л. А. Шелепину за полезные обсуждения и помощь при подготовке статьи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Заходи Р. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 3-4, 78 (1997).

[2] Заходи Р. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 5-6, 68 (1997).

[3] Заходи Р. А. Препринт ФИАН N 36, М., 1996.

[4] Шелепин Л. А. Труды ФИАН, **70**, 3 (1973).

[5] Keith R. Symon. Mechanics, Addison-Wesley, 1974.

[6] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию 18 апреля 1997 г.