

УДК 533.951

**РЕАЛЬНАЯ И МНИМАЯ ТОЧНОСТЬ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ
ПРИ ОПИСАНИИ СТЕЛЛАРАТОРОВ**А. Б. Кузнецов, С. В. Щепетов, Х. А. Хименец¹

В работе рассматривается вопрос о применимости метода усреднения для анализа плазмы, удерживаемой в стеллараторах. Выяснены причины того, что в большинстве рассмотренных в литературе случаев точность результатов, получаемых в рамках метода усреднения, оказывается выше, чем это следует из априорной оценки, базирующейся на величинах используемых малых параметров. Показано, что это справедливо лишь для достаточно узкого класса конфигураций, в то время как в общем случае априорные оценки справедливы.

В работе рассматривается вопрос о применимости метода усреднения для анализа плазмы, удерживаемой в стеллараторах. Здесь термин "стелларатор" обозначает широкий класс магнитных ловушек, где магнитные поверхности создаются токами, текущими по магнитным проводникам, расположенным вне плазмы. В классической схеме стелларатора [1] система проводников представляет собой соленоид, создающий продольное магнитное поле; трехмерные поля создаются токами, текущими в l_0 парах (число $l_0 \geq 1$ носит название заходности) винтовых проводников, намотанных на поверхность тора, причем в соседних проводниках токи равны по величине и противоположны по направлению. В торсатронах магнитные поверхности получают с помощью l_0 винтовых проводников с одинаковым направлением текущего по ним тока [2]. В гелиотронах [3] используется дополнительная (по сравнению с торсатронными) соленоидальная обмотка, позволяющая в широких пределах менять продольное магнитное поле.

¹СИЕМАТ, Мадрид, Испания.

Для исследования плазмы в стеллараторах с геометрической осью, лежащей в одной плоскости, широко используется метод усреднения [4 – 7]. Оказалось, что если аспектное отношение системы $A = R_0/a_p$, где R_0 – большой радиус системы, a_p – средний радиус границы плазмы, достаточно велико, то результаты, полученные с помощью метода усреднения, оказываются удивительно хорошими, если сравнивать их с результатами прямых трехмерных численных расчетов [7 – 9]. Иными словами, они значительно лучше, чем это можно было бы ожидать из априорной оценки, базирующейся на величинах малых параметров, используемых при выводе усредненных уравнений [4 – 7].

Метод усреднения [10] представляет собой хорошо известную и хорошо разработанную математическую процедуру. Применительно к стеллараторам она может быть реализована по крайней мере при наличии двух малых параметров. Одним из них является параметр $\epsilon = B^{st}/B_T$, т.е. отношение трехмерных компонент вакуумного магнитного поля $B^{st} = \nabla\tilde{\Phi}$ к аксиально симметричному продольному полю B_T . Более того, трехмерные компоненты должны быстро меняться при продвижении вдоль силовой линии магнитного поля (т.е. должен быть мал параметр $\mu l_0/N$, где μ – угол вращательного преобразования, N – полное число периодов трехмерного поля). Малость этих параметров позволяет применить процедуру усреднения. Остальные малые параметры являются вспомогательными. Малость магнитных полей, создаваемых токами, протекающими по плазме, по отношению к продольному магнитному полю, позволяет упростить получающуюся систему уравнений. Основным свойством усредненных уравнений является то, что вводится "эффективное" магнитное поле B^* , характеризующее усредненное влияние на удержание плазмы трехмерных вакуумных магнитных полей:

$$\mathbf{B}^* = \text{rot}(\mathbf{B}_T\Psi^*) - \mathbf{e}_\varphi \frac{\langle (\nabla\tilde{\Phi})^2 \rangle}{B_T}, \quad \Psi^* = \frac{R}{B_T^2} \left\langle \frac{1}{h_1} \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial x_1} \int \frac{1}{h_2} \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial x_2} d\varphi \right\rangle, \quad (1)$$

где (x_1, x_2, φ) – произвольная ортогональная система координат, φ – угловая переменная, по которой система периодична, h_1, h_2 – коэффициенты Ламе, угловые скобки означают усреднение по φ . Поле B^* получено с точностью до слагаемых ϵ^2 включительно. Более высокое приближение по этому параметру [11] для практических целей не использовалось из-за громоздкости получающихся уравнений. Заметим также, что для плазмы большого давления получить самосогласованные усредненные уравнения в $\sim \epsilon^3$ приближении невозможно, поскольку трехмерные магнитные поля, создаваемые плазменными токами, оказываются также $\sim \epsilon^3$, а уравнения для их определения в общем случае разрешить не удастся [12].

Основным обстоятельством, диктовавшим проведение нашего анализа, являлось то, что метод усреднения давал подозрительно хороший результат как для классических стеллараторов, так и для торсатронов (гелиотронов). Но ведь если в первых средние $\sim \epsilon^3$ строго обращаются в ноль, то в торсатронах имеется дополнительная возможность появления ненулевых средних ϵ^3 за счет, например, нелинейного взаимодействия гармоник с кратной периодичностью по φ .

Метод и результаты расчетов. Итак, почему же приближение ϵ^2 хорошо описывает плазму во всем объеме вплоть до ее границы (сепаратрисы) и действительно ли это так? Подробный анализ можно было бы провести с помощью трехмерного численного кода, анализирующего равновесие и устойчивость. Однако это потребовало бы от нас дополнительного подробного исследования точности самого кода. Поэтому воспользуемся для нашего анализа более простым способом. Ограничимся исследованием вакуумных конфигураций. Действительно, если метод дает прекрасные результаты по моделированию плазмы, то, в первую очередь, с высокой точностью должна описываться вакуумная магнитная конфигурация. Тогда из целого набора малых параметров у нас остается два: ϵ и $\mu l_0/N$. Следовательно, усредненное описание (1) справедливо с точностью порядка $M \max(\epsilon^3, \mu l_0/N)$, где M – коэффициент порядка единицы. Разумеется, даже при исследовании этого простейшего случая без численного анализа не обойтись. Однако всюду, где это возможно, мы будем использовать точные (аналитические) решения. Для нахождения вакуумных магнитных поверхностей мы воспользуемся численным методом трассировки силовых линий, но для описания магнитных полей используем точное аналитическое решение. Скалярный потенциал $\tilde{\Phi}$ можно представить в виде хорошо сходящегося ряда из известных специальных функций [13]:

$$\tilde{\Phi} = \sum_{l,m} H_{lm} Q_{lm} \sin(l\theta + m\varphi), \quad Q_{lm} = \sqrt{\cosh(\eta) - \cos(\theta)} Q_{l-1/2}^m(\cosh(\eta)) \quad (2)$$

в так называемой тороидальной системе координат (θ, η, φ) . Здесь H_{lm} – постоянные коэффициенты, $Q_{l-1/2}^m(\cosh(\eta))$ – присоединенные функции Лежандра, l и m – номера гармоник по полоидальному и тороидальному углу соответственно. Вакуумное магнитное поле мы найдем, проинтегрировав (2), аналитически. Воспользуемся хорошо известным аналитическим решением для H_{lm} [14] для специального вида ленточных токнесущих проводников, навитых на тор круглого сечения (напомним, что поверхности $\eta = \text{const}$ представляют собой семейство неконцентрических окружностей). Закон

намотки проводников на поверхность тора был выбран в виде:

$$N\varphi + l_0\theta + C \frac{\rho_0}{R_0} \sin(\theta) = \text{const}, \quad (3)$$

где ρ_0 – малый радиус тора, на который навиты проводники, C – константа. При этом получаем при заданных N, l_0, ρ_0, R_0 двухпараметрическое семейство магнитных конфигураций, поскольку H_{lm} , в свою очередь, зависят не только от коэффициента C , но и от размера проводников в полоидальном направлении $\Delta\theta$. В качестве примера мы рассмотрели "торсатронный" вариант навивки проводников на поверхность тора и рассмотрели приближение идеальной компенсации, т.е. случай, когда все аксиально-симметричные полоидальные компоненты магнитных полей подавляются за счет внешней системы аксиально-симметричных токовых колец.

В качестве примера были выбраны следующие значения параметров системы: $N = 10, l = 2, R_0 = 400 \text{ см}, \rho_0 = 100 \text{ см}$. При $C = 0.60$ (закон намотки) и $\Delta\theta = 30^\circ$ мы можем, в частности, приблизиться к реально существующему торсатрону LHD (Япония) [7], т.е. конфигурации, на примере которой демонстрировалось соответствие угла вращательного преобразования, вычисляемого в рамках метода усреднения, и угла, полученного с помощью прямого численного расчета [7]. На рис. 1а представлены магнитные поверхности для получившейся конфигурации. На рис. 1б представлена амплитуда компонент $\tilde{\Phi}$, вычисленных в точке $Z = 0, R = R_0 + 1.5a_p$, где (R, φ, Z) – цилиндрическая система координат. Для справки на рис. 1а представлены магнитные поверхности конфигурации, где произведена формальная замена B_T на $-B_T$ (в реальности это можно сделать, лишь используя дополнительную соленоидальную "гелиотронную" обмотку). Наконец, представлены поверхности, получаемые при разном числе слагаемых в разложении для скалярного потенциала $\tilde{\Phi}$. На рис. 1в показаны углы вращательного преобразования, получающиеся при разном числе гармоник в представлении $\tilde{\Phi}$. Как видно из рис. 1в, угол вращательного преобразования, получаемый в рамках формализма усреднения, точно воспроизводит угол, получаемый при численном расчете для основной конфигурации. Однако необходимо учесть следующее. Если подробно исследовать выражение (1) для "эффективного" поля, то окажется, что основной вклад в Ψ^* дают гармоники с периодичностью по φ , равной N ($\sim 90\%$). Вклад остальных гармоник невелик, например, вклад гармоник с периодичностью $2N \sim 8 - 9\%$, с $3N - \sim 0.5\%$ и так далее. Вклад же гармоник с $m = kN, k > 1$ в угол вращательного преобразования при прямом численном расчете оказывается больше. Для того, чтобы это продемонстрировать, был проведен расчет, где все коэффициенты H_{lm} с $k > 1$ были тождественно

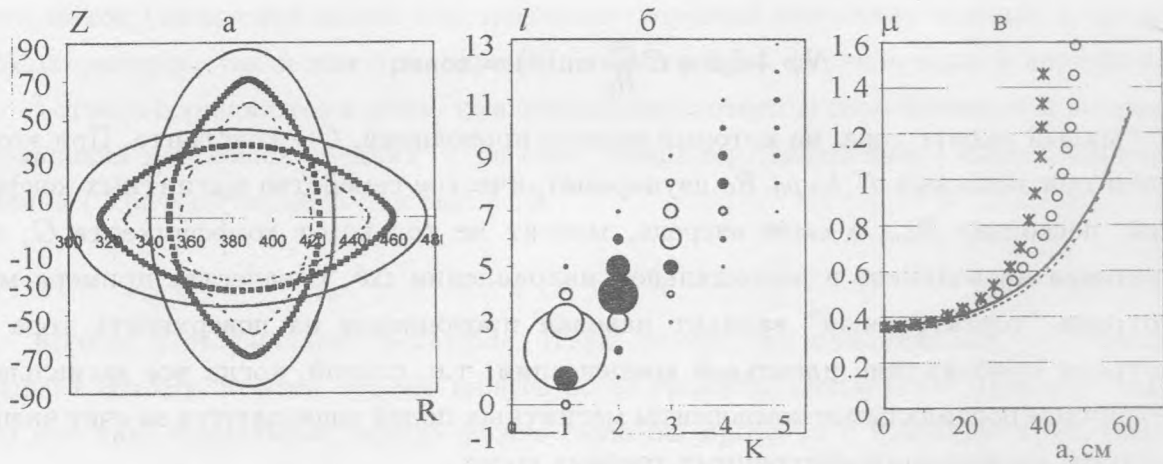


Рис. 1. Результаты расчетов для магнитной конфигурации с законом намотки проводников $C = 0.6$ и шириной обмоток 30 градусов: а. Граничные магнитные поверхности для конфигурации с обычным (сплошная линия) и противоположным (прерывистая линия) винтовым полем, а также с полем, составленным только из компонент первого ряда гармоник по тороидальному углу (точечный график); б. Амплитуда компонент скалярного потенциала винтового поля в точке $(R = R_0 + 1.5a_p, Z = 0)$ в зависимости от полоидального $l = 0 - 13$ и тороидального $k = 1 - 5$ номера. Площадь кругов пропорциональна величине соответствующей компоненты поля. Разным цветом показаны различные по знаку компоненты; в. Углы вращательного преобразования в зависимости от среднего радиуса магнитной поверхности a , полученные в рамках усредненной модели (прерывистая линия), полной модели винтового поля (сплошная линия), винтового поля с противоположным знаком (звездочки), поля только из гармоник первого ряда по тороидальной координате (круги).

равны 0. Как мы видим, этот случай воспроизводится при помощи метода усреднения, причем разница соответствует априорной оценке, сделанной на основе анализа малых параметров ϵ и $\mu l_0/N$. Наконец, рассмотрим еще одну возможность. Выражение (1) инвариантно относительно знака продольного поля V_T (отброшенные же слагаемые ϵ^3 явно не инвариантны). Если мы используем представление (2), где отброшены все высшие гармоники, то результат, естественно, не изменяется. Если же учесть гармоники с $k > 1$, то мы видим, что конфигурация существенно меняется, причем начиная с половины радиуса плазмы, где возрастают амплитуды высших рядов гармоник (рис. 1). Может сложиться впечатление, что конфигурация, рассмотренная выше, является выделенной. Действительно, при $C = 0.6$ спектр гармоник, участвующих в формировании

границы, имеет наиболее компактный вид. Конфигурация при $C = 0.6$ имеет среди семейства магнитных структур с разными параметрами катушки C наибольший радиус внешней магнитной поверхности. Однако иллюзия необычайной точности результатов, получаемых в рамках метода усреднения, имеет место и для других конфигураций, получаемых в рамках семейства (3). Например, это характерно для конфигурации с $C = 0.4$, где спектр гармоник значительно шире.

Наконец, представим еще одну конфигурацию. В случае полоидальной ширины обмоток $\Delta\theta = 90^\circ$ мы получаем спектр, типичный для "классического" стелларатора. Амплитуды гармоник с тороидальным номером $2N$ равны нулю. Конфигурация инвариантна относительно изменения знака продольного поля. Здесь мы имеем пример магнитной конфигурации, где различия в значениях угла вращательного преобразования, даваемых асимптотическим прямым методом, вполне соответствуют априорным представлениям о точности метода усреднения.

Итак, подведем итог нашему исследованию. Мнение о неожиданно высокой точности метода усреднения для стеллараторов появилось в результате того, что исследовались модельные конфигурации с малым числом гармоник, либо сравнение проводилось для реально существующих установок (или проектов их создания), которые появились в результате оптимизационных процедур, одной из целей которых было получение максимального радиуса сепаратрисы (при фиксированном малом радиусе системы токонесущих проводников). Система с обращенным продольным полем этому критерию не удовлетворяет.

В общем же случае метод усреднения для стеллараторов представляет собой надежный асимптотический метод с прогнозируемой точностью.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Koenig H. R. Confining ionized plasma with helical magnetic field. 1956 (Rep. US Atomic Energy Commission; NYO-7310).
- [2] Krukewitt T., Shohet J. L. Nucl. Fusion, **20**, 1375 (1980).
- [3] Uo S. Nuclear Fusion, **25**, 1243 (1985).
- [4] Johnson J. L. et al. Physics of Fluids, **1**, 281 (1958).
- [5] Коврижных Л. М., Щепетов С. В. Физика плазмы, **6**, 976 (1980).
- [6] Strauss H. R. Plasma Physics, **22**, 733 (1980).
- [7] Todoroki J. Journ. of Phys. Society of Japan, **56**, 128 (1987).

- [8] Johnson J. L. Computer Physics Reports, **4**, 37 (1986).
- [9] Herrnegger F., et al. Journ. of Computational Physics, **66**, 445 (1986).
- [10] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1958.
- [11] Михайлов М. И., Шафранов В. Д. Физика плазмы, **24**, 195 (1996).
- [12] Scherretov S. V. Nuclear Fusion, **34**, 369 (1994).
- [13] Справочник по специальным функциям, ред. Абрамовиц М., Стиган И. М., Наука, 1979.
- [14] Коврижных Л. М. ЖТФ, **XXXIII**, 377 (1963).

Институт общей физики РАН

Поступила в редакцию 7 февраля 2003 г.