УДК 537.533

К ТЕОРИИ ЖЕЛОБКОВОЙ И ТОКОВО-КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ В ПЛАЗМЕННОМ СЛОЕ, УДЕРЖИВАЕМОМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Е. Абу-Асали, А. А. Рухадзе, Б. Шокри

Исследованы желобковая и токово-конвективная неустойчивости замагниченного плазменного слоя в условиях, когда размер неоднородности плотности вблизи поверхности слоя много меньше неоднородности поля (модель резкой границы) и приближение геометрической оптики не применимо. Рассмотрены случаи толстого по сравнению с неоднородностью поля и тонкого слоев плазмы, и полученные инкременты развития неустойчивостей сравниваются с найденными в рамках геометрической оптики.

1. В [1] изложен общий способ анализа устойчивости произвольно неоднородной плазмы, удерживаемой сильным магнитным полем, когда поле колебаний можно считать потенциальным. Однако конкретный анализ для интересующих нас неустойчивостей приведен лишь в пределе коротковолновых колебаний, описываемых в рамках приближения геометрической оптики. Длинноволновые колебания, с длиной волны больше размера неоднородности плазмы, удерживаемой магнитным полем, были рассмотрены в недавних работах [2, 3], но при этом изучались лишь колебания бестоковых плазменных слоев, в которых интересущие нас неустойчивости развиваться не могут. В этих работах изучались только медленные неустойчивости, обусловленные ларморовским дрейфом заряженных частиц.

Вместе с тем, хорошо известно, что при наличии реального дрейфа носителей заряда, обусловленного кривизной силовых линий магнитного поля (гравитационный дрейф), либо продольным дрейфом электронов (ток в плазме), в системе возможно развитие быстрых неустойчивостей, с фазовой скоростью много больше тепловых скоростей частиц и даже самих скоростей дрейфа. Это хорошо известные желобковая (или гравитационная) и токово-конвективная неустойчивости, спектр которых для случая бесстолкновительной плазмы в приближении геометрической оптики дается соотношением

$$\omega^2 = -\frac{k_y(\mathbf{ku})\Omega_i}{k^2}\frac{\partial \ln N}{\partial x} + \frac{k_z^2}{k^2}\frac{M}{m}\Omega_i^2. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{u} = \mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i$ – относительная скорость объемного дрейфа электронов и ионов, k_z и k_y – продольное и азимутальное волновые числа колебаний с частотой ω, причем считается, что магнитное поле $\mathbf{B}_0$ направлено вдоль оси 0Z, а плазма неоднородна вдоль оси 0X, $\Omega_i = eB_0/Mc$ – ионная ларморовская частота. При получении (1) предполагалось, что $k_y \gg k_z$, $|\frac{\partial \ln N}{\partial x}|$, а поэтому $k^2 \approx k_y^2 + k_z^2 + (\partial \ln N/\partial x)^2 \approx k_y^2$, плазма считается достаточно плотной, $\omega_{Li}^2 = 4\pi e^2 N/M \gg \Omega_i^2$. Последнее неравенство для простоты считается выполненным и ниже.

Если дрейф носителей заряда обусловлен кривизной силовых линий магнитного поля, то [1]

$$\mathbf{u}||OY,\ u = +\frac{v_{Ti}^2 + u_s^2}{R\Omega_i} \equiv +\frac{g_{eff}}{\Omega_i}, \tag{2}$$

где $v_{Ti} = \sqrt{T_i/M}$, $v_s = \sqrt{T_e/M}$. Величину g_{eff} часто называют гравитационным ускорением частиц, обусловленным кривизной магнитного поля R. В этом случае

$$\omega^2 = g_{eff}\frac{\partial \ln N}{\partial x} + \frac{k_z^2}{k_y^2}\frac{M}{m}\Omega_i^2. \tag{3}$$

Видно, что колебания могут быть неустойчивыми, если $\partial \ln N/\partial x < 0$ (кривизна и неоднородность противоположны), причем конечное продольное волновое число стабилизирует неустойчивость. В пределе $k_z = 0$ эта неустойчивость известна как желобковая.

Весьма близкую природу имеет и так называемая токово-конвективная неустойчивость, обусловленная продольным токовым дрейфом электронов, т.е. $\mathbf{u}_e = \mathbf{u}||OZ$, $\mathbf{u}_i = 0$. В этом случае из (1) следует [1]

$$\omega^2 = -\frac{k_z u}{k_y}\Omega_i\frac{\partial \ln N}{\partial x} + \frac{k_z^2}{k_y^2}\frac{M}{m}\Omega_i^2. \tag{4}$$

Видно, что неустойчивость может иметь место при $k_z \neq 0$ и любом знаке $\partial \ln N/\partial x$, но с ростом k_z происходит стабилизация неустойчивости.

2. Все приведенные выше результаты заимствованы из [1] и даются для сравнения. Ниже они обобщаются на случай плазменного слоя конечной толщины a и длинноволновых колебаний с длиной волны больше неоднородности границы плазмы. Как уже отмечалось выше, общее дисперсионное уравнение для колебаний плазменного слоя, удерживаемого магнитным полем, было получено в работах [2, 3], в которых, однако, реальный дрейф носителей заряда не учитывался. Учет такого дрейфа приводит к тому же по виду уравнению

$$[(1+\beta)^2\kappa^2 + k_y^2 + k_z^2 - \gamma^2]\tanh(\kappa a) + 2\kappa(1+\beta)\sqrt{k_y^2+k_z^2} = 0, \tag{5}$$

но с видоизмененными величинами

$$\beta = \sum_{\alpha=e,i} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2} I_+\left(\frac{\omega - \mathbf{ku}_\alpha}{k_z v_{T\alpha}}\right), \; \gamma = \sum_{\alpha=e,i} \frac{\omega_{L\alpha}^2 k_y}{\Omega_\alpha(\omega - \mathbf{ku}_\alpha)} I_+\left(\frac{\omega - \mathbf{ku}_\alpha}{k_z v_{T\alpha}}\right),$$

$$\kappa^2 = k_y^2 + \frac{1}{1+\beta}\left\{k_z^2 + \sum_{\alpha=e,i}\frac{\omega_{L\alpha}^2}{v_{T\alpha}^2}\left[1 - I_+\left(\frac{\omega - \mathbf{ku}_\alpha}{k_z v_{T\alpha}}\right)\right]\right\}, \; I_+(x) = xe^{-x^2/2}\int\limits_{i\infty}^{x} e^{\tau^2/2}d\tau, \tag{6}$$

которые теперь включают скорости дрейфа носителей $\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{u}_{e,i}$; все обозначения совпадают с использованными в [1].

Величина $|\kappa|^{-1}$ представляет собой глубину проникновения поля в плазменный слой. Поэтому в пределе $a|\kappa| \gg 1$, как и следовало ожидать, из (1) следует уравнение для поверхностной волны для полуограниченной плазмы (на двух поверхностях слоя)

$$(1+\beta)\kappa + \sqrt{k_y^2+k_z^2} \pm \gamma = 0. \tag{7}$$

В этом случае, очевидно, должно выполняться условие $\kappa^2 > 0$.

Уравнение (7) содержит нечетную по k_y функцию $\gamma(k_y)$, что свидетельствует об однонаправленности волн на каждой из поверхностей плазменного слоя. С уменьшением толщины слоя a такая однонаправленность ослабевает, а в пределе тонкого слоя, $a|\kappa| \ll 1$, полностью исчезает. В этом пределе уравнение (5) принимает вид [2, 3]

$$(1+\beta)^2\kappa^2 + k_y^2 + k_z^2 - \gamma^2 + 2\frac{1+\beta}{a}\sqrt{k_y^2+k_z^2} = 0. \tag{8}$$

Это уравнение, в отличие от (7), является четной функцией k_y. Это означает, что в рассматриваемом пределе две поверхностные волны на противоположных поверхностях слоя сливаются в одну, вследствие чего их однонаправленность исчезает. В следующем порядке по $a|\kappa| \ll 1$ она слабо проявится[1].

3. Уравнения (7) и (8) в отсутствие объемного дрейфа носителей анализировались в работах [2, 3], где было показано, что неустойчивые решения существуют только в области малых фазовых скоростей, меньших тепловых скоростей частиц. При наличии сколь угодно малого объемного дрейфа носителей появляются неустойчивости и при полном пренебрежении тепловым движением, обобщающие решения (1), (3) и (4), справедливые в пределе геометрической оптики. Как и выше, мы здесь приведем такие решения, считая $k_y^2 \gg k_z^2$, $\omega_{Li}^2 \gg \Omega_i^2$.

Из уравнения (7) находим спектр поверхностных волн на поверхностях "толстого" ($|k_y|a \gg 1$) слоя в условиях, когда их фазовая скорость больше как тепловых скоростей, так и скоростей дрейфа носителей (ср. с (1)):

$$\omega^2 = \pm\frac{k_y}{|k_y|}(\mathbf{ku})\Omega_i + \frac{1}{2}\frac{k_z^2}{k_y^2}\frac{M}{m}\Omega_i^2. \tag{9}$$

В случае, когда объемный дрейф носителей определяется кривизной силовых линий магнитного поля, из формул (2) и (9) следует

$$\omega^2 = \pm|k_y|g_{eff} + \frac{k_z^2}{2k_y^2}\frac{M}{m}\Omega_i^2. \tag{10}$$

Сравнивая это с (3), видим, что вместо характерного размера неоднородности плазмы $L_0^{-1} \sim |\frac{\partial}{\partial x}\ln N|$ в (10) фигурирует k_y. Видно, что неустойчива лишь одна из поверхностных волн, для которой кривизна положительна. Кроме того, конечное значение продольного волнового числа k_z, как и в случае (3), играет стабилизирующую роль. Поскольку в приближении геометрической оптики считалось $k_yL_0 \gg 1$, то заключаем, что инкремент желобковой неустойчивости (10) (при $k_z \to 0$) больше чем (3), т.е. длинноволновая мода нарастает быстрее коротковолновой.

Аналогичная ситуация имеет место и для плазмы с током, т.е. когда $\mathbf{u}_e = \mathbf{u}||OZ$, $\mathbf{u}_i = 0$. Формула (9) при этом дает

$$\omega^2 = \pm\frac{k_yk_zu}{|k_y|}\Omega_i + \frac{k_z^2}{2k_y^2}\frac{M}{m}\Omega_i^2. \tag{11}$$

[1]Здесь мы не говорим об однонаправленности вдоль оси OZ, являющейся проявлением эффекта Доплера $\omega \to \omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_\alpha$.

Здесь также происходит замена $L_0^{-1} \sim |\frac{\partial \ln N}{\partial x}| \to k_y$, причем, с ростом k_z неустойчивость стабилизируется, неустойчивы только сильно вытянутые вдоль магнитного поля винтовые возмущения. Кроме того, поскольку $k_y L_0 \gg 1$, мы опять заключаем, что длинноволновые моды обладают большим инкрементом, чем коротковолновые.

4. Рассмотрим теперь предел тонкого ($|k_y|a \ll 1$) плазменного слоя и проанализируем решения уравнения (8), считая $k_y^2 \gg k_z^2$ и $\omega_{Li}^2 \gg \Omega_i^2$. В результате это уравнение сводится к виду

$$\left(1 + \frac{2}{|k_y|a}\frac{\Omega_i^2}{\omega_{Li}^2}\right)\omega^4 - \frac{k_z^2}{k_y^2}\frac{M}{m}\Omega_i^2\omega^2 - (\mathbf{ku})^2\Omega_i^2 = 0. \quad (12)$$

Один из корней этого уравнения соответствует неустойчивым колебаниям, и их спектр дается соотношением

$$\omega^2 = \left[2\left(1 + \frac{2}{|k_y|a}\frac{\Omega_i^2}{\omega_{Li}^2}\right)\right]^{-1}\left[\frac{k_z^2}{k_y^2}\frac{M}{m}\Omega_i^2 - \sqrt{\frac{k_z^4}{k_y^4}\frac{M^2}{m^2}\Omega_i^4 + 4\left(1 + \frac{2}{|k_y|a}\frac{\Omega_i^2}{\omega_{Li}^2}\right)\Omega_i^2(\mathbf{ku})^2}\right]. \quad (13)$$

Выражение (13) сильно упрощается для желобковой ($k_z \to 0$) моды колебаний, когда оно принимает вид

$$\omega^2 = -k_y g_{eff}\left(1 + \frac{2}{|k_y|a}\frac{\Omega_i^2}{\omega_{Li}}\right)^{-1/2}. \quad (14)$$

Сравнивая (14) с (10), видим, что в тонком плазменном слое инкремент нарастания желобковой моды уменьшается по сравнению с инкрементом нарастания поверхностной моды с $k_z = 0$ и становится зависящим от толщины слоя, если $|k_y|a \gtrsim 2\Omega_i^2/\omega_{Li}^2 \gg 1$.

Что касается токово-конвективной неустойчивости в токовой плазме, то инкремент ее нарастания (13) для тонкого слоя можно представить простым выражением в противоположных предельных случаях:

$$\omega^2 = \begin{cases} -\omega_0 k_z u \text{ при } \omega^2 > \frac{k_z^2}{k_y^2}\frac{M}{m}\omega_0^2 \equiv \frac{k_z^2}{k_y^2}\frac{M}{m}\Omega_i^2\left(1 + \frac{2\Omega_i^2}{|k_y|a\omega_{Li}^2}\right)^{-1} \\ -\frac{m}{M}k_y^2u^2 \text{ при } \omega^2 < \frac{k_z^2}{k_y^2}\frac{M}{m}\omega_0^2. \end{cases} \quad (15)$$

Здесь также мы видим уменьшение инкремента нарастания токово-конвективной неустойчивости в тонком слое плазмы по сравнению с инкрементом нарастания поверхностной моды этой же неустойчивости в "толстом" слое.

5. В заключение кратко обсудим возможность проявления рассмотренной выше токово-конвективной неустойчивости в экспериментах [4]. Именно с целью объяснения

этих экспериментов были выполнены работы [2, 3]. Напомним, что в экспериментах [4] создавался тонкий плазменный слой с толщиной $\Delta_p \lesssim 1\,\text{мм}$ низковольтным электронным пучком (с энергией $\lesssim 1\,\text{кэВ}$ и плотностью $n_b \approx 10^{11}\,\text{см}^{-3}$) в тяжелом газе с $M \approx 200 \cdot 10^{-24}\,\text{г}$ (ксенон) при давлении $P_0 \simeq 10^{-3}\,\text{торр}$. Средний радиус пучка, а следовательно, и плазменного слоя составлял $r_p \simeq 1\,\text{см}$, т.е. $r_p \gg \Delta_p$ и слой можно считать плоским. Газ ионизовался в течение десятков микросекунд до полной ионизации ($N_{max} \lesssim 10^{13}\,\text{см}^{-3}$), после чего пучок выключался и плазма распадалась также в течение десятков микросекунд. Вся система помещена в сильное продольное магнитное поле с напряженностью в $20\,\text{кГс}$, причем длина системы $L_{\|} \simeq 25\,\text{см}$.

В работах [2, 3] наблюдаемая в экспериментах [4] азимутальная неоднородность плазменного слоя объясняется развитием дрейфовой неустойчивости на стадии распадающейся бестоковой плазмы. Несмотря на вполне убедительное согласие теоретических оценок с результатами эксперимента, не лишено смысла выяснить, не могла ли развиться токово-конвективная неустойчивость в слое на стадии образования плазмы, когда в ней протекал пучковый ток. Чтобы ответить на этот вопрос напомним, что токово-конвективная неустойчивость развивается в условиях

$$\Omega_i^2 \gg \omega^2 \gg (k_z u)^2,\ k_z^2 v_{Te}^2,\ \nu_e^2. \qquad (16)$$

В экспериментах [4] $k_{zmin} \simeq \pi/L_{\|} \simeq 10^{-1}\,\text{см}^{-1}$, а $u \simeq 10^9\,\text{см/с}$, $\Omega_i \simeq 2 \cdot 10^6\,\text{с}^{-1}$. Поэтому очевидно, что $k_z u \simeq 10^8\,\text{с}^{-1}$ и неравенство $\Omega_i > k_z u_i$ заведомо не выполняется. Следовательно, развития токово-конвективной неустойчивости на стадии создания плазмы ожидать не следует, и остается только объяснение, данное в работах [2, 3]. Вместе с тем, отметим что с переходом к более сильным магнитным полям (до $50\,\text{кГс}$) и длинным системам (до $L_{\|} \gtrsim 100\,\text{см}$), к чему стремится современная релятивистская плазменная СВЧ электроника, опасность развития токово-конвективной неустойчивости станет реальной.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики, М., Высшая школа, 1988 г.

[2] Кринецкий В. Б., Рухадзе А. А., Шокри Б. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 11 – 12, 38 (1995).

[3] Rukhadze A. A. and Shokri B. Phys. Letters A, 1997 (in press).

[4] Л о з а О. Т., П о н о м а р е в А., У л ь я н о в Д. К. и др. Физика плазмы, **23**, 222 (1997).

Институт общей физики РАН Поступила в редакцию 3 июня 1997 г.