

УДК 533.95

ПЕРЕЗАМЫКАНИЕ СИЛОВЫХ ЛИНИЙ В СТРУКТУРНО-НЕУСТОЙЧИВЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

С. В. Буланов, И. Н. Иновенков¹, В. В. Пичушкин¹, К. Шиндлер²

Представлены результаты численного моделирования и теоретического анализа перехода структурно-неустойчивых магнитных конфигураций в структурно-устойчивые под действием возмущений, приложенных к границам области в окрестности магнитной нулевой линии третьего порядка. В зависимости от симметрии исходной конфигурации и граничных условий на месте критической точки образуется токовая область конечных размеров, ограниченная магнитными сепаратрисами, или система токовых слоев и ударных волн на магнитных сепаратрисах.

Перезамыкание магнитных силовых линий, имеющее важное значение для лабораторной и космической плазмы [1], тесным образом связано с проблемой структурной устойчивости векторных полей. Как известно, система называется структурно-устойчивой, если при всяком достаточно малом изменении векторного поля полученная система эквивалентна исходной. В процессе перезамыкания топология магнитного поля изменяется, то есть система перестает быть эквивалентной исходной. Естественно ожидать, что результатом будет переход структурно-неустойчивой магнитной конфигурации в структурно-устойчивую.

Если динамика плазмы вблизи критических точек магнитного поля низшего порядка (окрестности нейтральной плоскости и окрестности X -линии) подробно исследуется

¹Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова.

²Рурский университет, г. Бохум, Германия.

в течение многих лет, то в литературе практически отсутствует обсуждение перезамыкания вблизи особых точек высокого порядка, а также анализ вопросов влияния глобальной структурной неустойчивости магнитных конфигураций; исключение составляет работа [2].

Ниже представлены результаты исследования вынужденного перезамыкания магнитных силовых линий в конфигурации с вырожденной критической линией, представляющей собой в невозмущенном состоянии линию пересечения трех сепаратрисных поверхностей.

Рассмотрим конфигурацию, которая исходно обладает поворотной симметрией порядка 3 и зеркальной симметрией. Предполагаем, что система однородна вдоль оси z . Магнитное поле с такими свойствами задано векторным потенциалом $\mathbf{A}_{00} = A_{00}(x, y)\mathbf{e}_z$, $A_{00}(x, y) = \Im\{ig\zeta^3/3\} \equiv g(x^3 - 3y^2x)/3$. Здесь $\zeta = x + iy$, $g = B_0/s^2$ с B_0 равным напряженности магнитного поля на границе области с размерами порядка s . Эта конфигурация структурно-неустойчива, поскольку особая точка ($x = 0$, $y = 0$) векторного поля \mathbf{V} является вырожденной: линеаризованной задаче отвечает собственное значение, равное нулю.

Малые возмущения магнитного поля приводят к бифуркации вырожденной особой точки или ее исчезновению. В этом случае магнитное поле задано вектор-потенциалом

$$A_0(x, y) = \frac{g}{3}(x^3 - 3y^2x) + \epsilon_1 x^2 + \epsilon_2 y^2 + \epsilon_3 xy + \epsilon_4 x + \epsilon_5 y. \quad (1)$$

Типичные изменения топологии магнитного поля под действием малых возмущений показаны на рис. 1. Полное исследование бифуркаций в семействе (1) приведено в [3]. Здесь мы отметим, что структурно-устойчивой из приведенных на рис. 1 конфигураций является только 1с. Конфигурации 1а, 1б отвечают случаю, когда сепаратриса идет из седла в седло и поэтому негрубые (глобально структурно-неустойчивы).

Рассмотрим задачу о поведении плазмы вблизи критической точки в предположении, что в начальный момент времени плазма находится в равновесии ($\mathbf{v} = 0$) в потенциальном поле (1), где мы ограничиваемся рассмотрением поля вида $A_0 = \Im\{ig\zeta^3/3 - \epsilon^2\zeta\}$; плотность плазмы предполагаем однородной, а давление равным нулю. Равновесие нарушается под действием возмущений, приложенных к границе. Возмущения, соответствующие включению однородного по z электрического тока, возбуждают МГД волну, которая распространяется по направлению к началу координат.

Задача о линейных МГД волнах в потенциальном магнитном поле, зависящем от

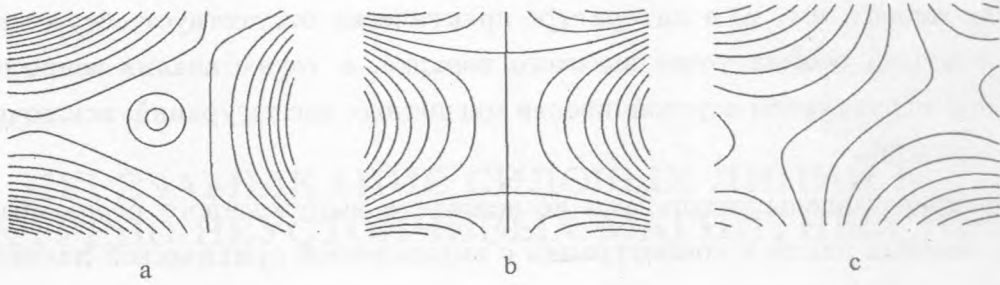


Рис. 1. Изменение топологии магнитного поля вблизи критической точки третьего порядка под действием возмущений низшего порядка.

двух координат, была решена в общем виде в работах [4]. Следуя им, описываем магнитное поле в терминах комплексного потенциала $f_0(\zeta) = F_0(\zeta) + iA_0(\zeta)$. Линеаризация уравнений МГД приводит для возмущений магнитозвукового типа (ток параллелен оси z) к уравнению

$$\partial_{tt}a - |f'_0|^2 \Delta a = 0. \quad (2)$$

Здесь $a(x, y, t)$ – возмущение z -компоненты вектор-потенциала; $f'_0 \equiv df_0/d\zeta$; время нормировано на $s^2(4\pi\rho_0)^{1/2}/B_0 \equiv (4\pi\rho_0)^{1/2}/g$.

Конформное преобразование

$$w(\zeta) \equiv u + iv = \frac{1}{2\epsilon} \ln \left(\frac{\zeta - \epsilon}{\zeta + \epsilon} \right) \quad (3)$$

приводит уравнение (2) к волновому уравнению в декартовых координатах u и v . Его фундаментальное решение известно, и мы можем записать в явном виде решение задачи Коши для неоднородного уравнения. Вдали от начала координат при $|\zeta| \gg \epsilon$ из (3) видно, что $w \approx -1/\zeta$. Отсюда следует, что волна может быть цилиндрической и асимптотически при $t \rightarrow \infty$ и $|tr - 1| \ll 1$ описывается выражением

$$a \approx r^{1/2} F(t - 1/r) \equiv q_0 r^{1/2} (t - 1/r)^{1/2}. \quad (4)$$

Азимутальная компонента возмущения магнитного поля в волне, равная $b_\varphi = \partial_r a$, такова: $b_\varphi \approx q_0 t / (2r^{1/2} (t - 1/r)^{1/2}) \approx q_0 / (2r^{3/2} \tau^{1/2})$. Мы учитываем, что вблизи фронта волны $t - 1/r = \tau \ll 1$. Таким образом мы получили, что волна распространяется к центру по закону $r \approx 1/t$ при $t \rightarrow \infty$. При этом амплитуда волны, возмущение

магнитного поля, возрастает как $r^{-3/2}$ при $r \rightarrow 0$. Напряженность невозмущенного магнитного поля зависит от расстояния от нулевой линии как квадрат расстояния: $|B| = gr^2$. Сравнивая по величине это выражение с b_φ , найдем, что волна становится сильной на расстоянии от нулевой линии, равном $r_n = (q_0/2\tau^{1/2}g)^{2/7}$. Полученные здесь решения мы используем ниже для задания граничных условий при численном моделировании.

Существенно нелинейная стадия кумуляции МГД волны вблизи X-линии магнитного поля завершается формированием квазистационарного токового слоя [5]. В работе [5] было предсказано, что магнитная конфигурация, формирующаяся вблизи критической точки высокого порядка, также должна эволюционировать в систему, содержащую семейство конечного числа токовых слоев. Для подтверждения или опровержения этой гипотезы необходимо МГД моделирование.

Начальная задача для уравнений МГД, решение которой описывает самосогласованную нелинейную эволюцию плазмы и магнитного поля в окрестности критической точки, решалась численно. Мы используем безразмерные переменные и систему уравнений МГД [6].

Равновесие нарушается под действием возмущений векторного потенциала, приложенных на границе расчетной области. При $|x| = 1$, $|y| = 1$ z -компонента векторного потенциала равна

$$A(x, y, t) = A_0(x, y) + r^2 f(t - 1/r + 1), \quad (5)$$

где радиус равен $r^2 = x^2 + y^2$ с x, y взятыми на границе. Функция $f(\xi)$ равна $-\tilde{E}(\xi - 1)^2$ для $\xi > 1$ и $f(\xi) = 0$ для $\xi < 1$. Здесь \tilde{E} равно значению электрического поля в возмущениях, которое в безразмерном виде может быть записано в виде $\tilde{E} = cE(4\pi\rho_0)^{1/2}/(gs^2)^2$. Граничные условия для остальных переменных заданы следующим образом. На той части границы, где плазма втекает в расчетную область, плотность и давление плазмы заданы и равны $\rho = 1$, $p = 1$. На той части границы, где плазма вытекает из расчетной области, производные вдоль выходящих характеристик полагаются равными нулю.

Обратная величина безразмерной магнитной вязкости $\tilde{\nu}_m = c^2/4\pi\sigma v_a s$ равна безразмерному числу Лундквиста, вычисленному для значения альфвеновской скорости на границе области: $v_a = gs^2/(4\pi\rho_0)^{1/2}$. В представленных в данной статье результатах численного моделирования обратное число Лундквиста $S^{-1} \equiv \tilde{\nu}_m$, безразмерное значение теплопроводности и безразмерное электрическое поле равны $\tilde{\nu}_m = 0,006$, $\tilde{\kappa} = 0,01$ и $\tilde{E} = 0,05$, соответственно.

Основные режимы перестройки магнитной конфигурации, которые мы обсуждаем в данной статье, соответствуют возмущениям, близким к азимутально-симметричным, которые возбуждают в плазме полный электрический ток конечной величины. В первом варианте расчетов $\epsilon = 0$, и $\epsilon = 1,7$ во втором варианте.

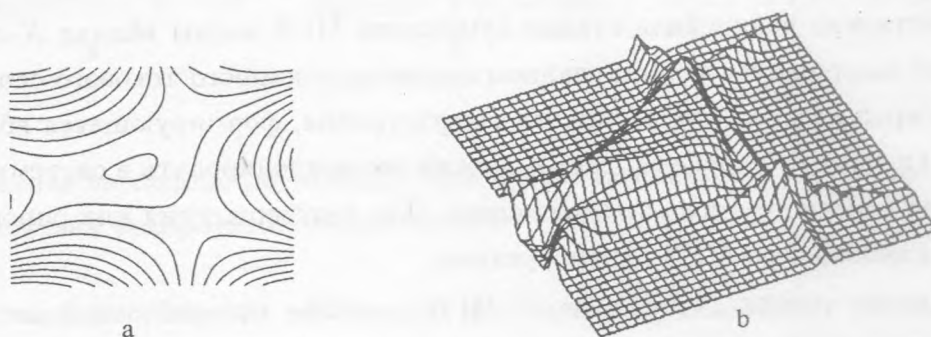


Рис. 2. Распределение линий равного значения векторного потенциала (а) и плотность электрического тока (b) в момент времени $t = 3,5$ для первого варианта расчетов.

На рис. 2 показаны распределения линий равного значения векторного потенциала (2a) и плотность электрического тока (2b) для $t = 3,5$ для первого варианта расчетов, исходное поле в котором отвечает рисунку 1a. На этой стадии достигается квазистационарный режим. Видно возникновение токовой области конечных размеров, которая ограничена сепаратрисами магнитного поля. В углах этой области расположены три нулевых линии магнитного поля X-типа, а в ее центре – нулевая линия O-типа. В углах токовой области находятся токовые слои, подобные тем, что возникают в окрестности нулевых линий X-типа. С этими токовыми слоями связано течение плазмы: плазма в основном обтекает токовую область, двигаясь вдоль магнитных сепаратрис на ее границах. Вблизи токовых слоев расположены также ударные волны. Подчеркнем здесь, что, хотя размеры области локализации тока в данном режиме в направлении осей x и y одного порядка в отличие от структуры токового слоя вблизи X-линии, изменение распределения тока вблизи сепаратрис происходит на много меньшем масштабе, определяемом диссипацией.

Следующий вариант расчетов отвечает невозмущенной магнитной конфигурации вида, который представлен на рис. 1b с двумя нулевыми линиями X-типа, соединенными сепаратрисой. Однако такая система структурно-неустойчива и мы наблюдаем

сценарий развития, согласно которому конфигурация эволюционирует в структурно-устойчивую.

На рис. 3 показаны распределения линий равного значения векторного потенциала (3a) и плотность электрического тока (3b) для $t = 40$. Видно возникновение системы токовых слоев и ударных волн, которые расположены вблизи сепаратрисных поверхностей магнитного поля. Магнитная конфигурация в результате самосогласованной эволюции течения плазмы и магнитного поля трансформируется в структурно-устойчивую. Она соответствует магнитному полю, которое показано на рис. 1с. Отметим, что исходно симметричная картина магнитного поля под действием симметричных возмущений эволюционирует в несимметричную, но структурно-устойчивую.

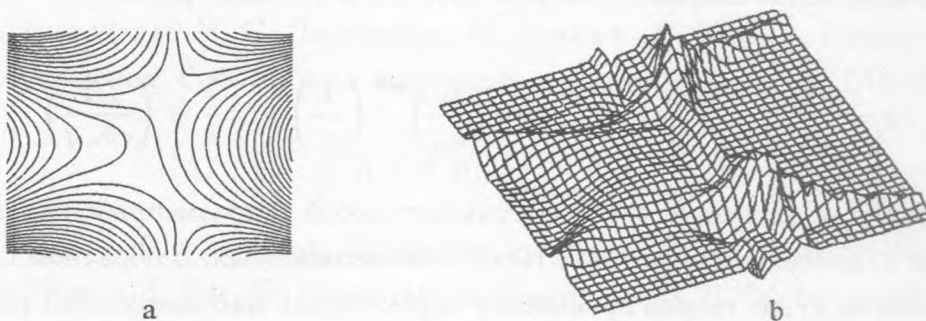


Рис. 3. Распределение линий равного значения векторного потенциала (a) и плотность электрического тока (b) в момент времени $t = 40$ для второго варианта расчетов.

Следуя работам [7], рассмотрим модель стационарного режима перезамыкания магнитных силовых линий на границе токовой области, которая образуется на стадии, показанной на рис. 2, или в токовых слоях, представленных на рис. 3. Как приграничная область токовой конфигурации (рис. 2), так и токовые слои на рис. 3 имеют малый размер (толщину), равный a , и большой размер (ширину), равный b . Плазма с замороженным в нее магнитным полем втекает в токовый слой со скоростью v_{in} . Под действием натяжения магнитных силовых линий и градиента давления плазмы она выбрасывается вдоль токового слоя со скоростью v_{out} . Условие сохранения числа частиц дает соотношение $n_p v_{in} b = n_s v_{out} a$, где n_p и n_s равны значению плотности плазмы внутри слоя и вне его, а значение v_{out} положено равным локальному значению альфвеновской скорости v_a . Толщина токового слоя может быть оценена как $a = (v_m/v_{in})^{1/2}$. Из этих соотношений следует формула Паркера–Свита для скорости магнитного перезамыкания: $v_{in} = v_a (v_m/bv_a)^{1/2}$. Принимая во внимание слабую зависимость от величины

отношения n_s/n_p , далее мы положили его равным единице.

Полученное соотношение зависит от величины альфвеновской скорости v_a . Однако в окрестности критической линии магнитное поле неоднородно: $|B| = gr^2$, поэтому значение альфвеновской скорости зависит от координат: $v_a = Gr^2$, где $G = g/(4\pi\rho_0)^{1/2}$ и $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Для r , равного ширине слоя b , альфвеновская скорость равна Gb^2 . Размер токовой области определяется условием равенства напряженности магнитного поля, которое создается током I , текущим в ней, и равным $\approx I/cb$, напряженности невозмущенного магнитного поля gb^2 . Отсюда следует, что $b \approx (I/gc)^{1/3}$. Используя это выражение, найдем, что толщина токового слоя (толщина приграничной области в случае азимутально-симметричных граничных условий), скорость магнитного перезамыкания и отношение ширины токового слоя к его толщине равны

$$a = \left(\frac{\nu_m}{G}\right)^{1/2} \left(\frac{gc}{I}\right)^{1/6}, \quad v_{in} = \left(\frac{G}{\nu_m}\right)^{1/2} \left(\frac{I}{gc}\right)^{1/6}, \quad \frac{b}{a} = \left(\frac{GI}{c\nu_m g}\right)^{1/2}, \quad (6)$$

соответственно. Отношение b/a представляет собой безразмерный параметр задачи. Если $b/a \ll 1$, диссипативные эффекты сильнее нелинейных. В обратном случае размер токовой области существенно превышает характерный диссипативный размер.

Подобным образом можно получить выражения для толщины и ширины токового слоя и скорости магнитного перезамыкания в окрестности нулевой линии порядка ℓ . А именно,

$$a \approx \left(\frac{\nu_m}{G}\right)^{1/2} \left(\frac{gc}{I}\right)^{\frac{\ell-2}{2\ell}}, \quad b \approx \left(\frac{I}{gc}\right)^{1/\ell}, \quad v_{in} \approx \left(\frac{G}{\nu_m}\right)^{1/2} \left(\frac{I}{gc}\right)^{\frac{\ell-2}{2\ell}}. \quad (7)$$

В заключение заметим, что переход в конфигурацию с топологией магнитного поля, отличной от начальной, запрещенный в рамках идеальной магнитной гидродинамики, осуществляется в процессе перезамыкания магнитных силовых линий. На начальной стадии возмущения создают магнитозвуковую волну, которая распространяется по направлению к нулевой линии. По мере ее распространения амплитуда возмущений и несимметрия волнового фронта нарастают. В области, где амплитуда волны становится соизмеримой с величиной исходного магнитного поля, волна создает систему токовых слоев.

Вид токовых слоев и их дальнейшая эволюция существенным образом отличаются в двух рассмотренных вариантах расчетов.

Для граничных условий, близких к азимутально-симметричным в поле с $A_0 = \Im\{i\zeta^3/3\}$, конфигурация с токовыми слоями является переходной: токовые слои исчезают за время порядка альфвеновского. На их месте образуется токовая область, которая ограничена магнитными сепаратрисами. Внутри области плотность электрического тока квазиоднородна, а плотность плазмы существенно превышает исходное значение. Плазма здесь практически неподвижна.

Во втором случае, который отвечает исходному полю с двумя нулевыми линиями, соединенными сепаратрисой, с $A_0 = \Im\{i\zeta^3/3 - \epsilon^2\zeta\}$ азимутально-симметричные возмущения формируют систему токовых слоев и ударных волн вблизи сепаратрисных поверхностей магнитного поля. В процессе эволюции магнитной конфигурации происходит спонтанное нарушение симметрии и поворот конфигурации на конечный угол.

Авторы благодарят И. С. Данилкина, К. Авинаш, П. Кау, Э. Лазаро и А. Сен за полезные обсуждения. Работа была выполнена в рамках проекта INTAS-93-2836.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] B i s k a m p D. Nonlinear Magnetohydrodynamics, in Cambridge Monographs on Plasma Physics, **1**, Eds. W. Grossman, D. Papadopoulos, R. Sagdeev, and K. Schindler. Cambridge Univ. Press, 1993.
- [2] Бу л а н о в С. В., П и ч у ш к и н В. В., Ш и н д л е р К. Физика плазмы, **23**, 979 (1996).
- [3] П о с т о н Т., С т ю а р т И. Теория катастроф и ее приложения. М., Мир, 1980.
- [4] Бу л а н о в С. В., П е г о р а р о Ф. Физика плазмы, **19**, 1120 (1993);
B u l a n o v S. V. and P e g o r a r o F. Phys. Lett., A **180**, 275 (1993).
- [5] С ы р о в а т с к и й С. И. ЖЭТФ, **60**, 1727 (1971).
- [6] Б р у ш л и н с к и й К. В., З а б о р о в А. М., С ы р о в а т с к и й С. И. Физика плазмы, **6**, 297 (1980); Бу л а н о в С. В., Б у т о в И. Я., Г в а л а д з е Ю. С., и др. Физика плазмы, **12**, 309 (1986); B u l a n o v S. V., D u d n i k o v a G. I., Z h u k o v V. P. et al., Phys. Lett., A **203**, 219 (1995).
- [7] S w e e t P. A. Electromagnetic Phenomena in Cosmic Physics, ed. by B. Lehnert (Cambridge University Press, 1958), p. 122; П а р к е р Е. Космические магнитные поля. М., Мир, 1982.