УДК 530.1

МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р. А. Захеди, Л. А. Шелепин

Рассматривается представление нелинейных уравнений через эквивалентную систему линейных, где переменная нелинейных играет роль параметра. При этом используется метод линеаризации в теории колец. Для солитонов, описываемых нелинейными уравнениями для амплитуд вероятности, возникают групповые характеристики.

Метод обратной задачи рассеяния нашел широкое применение для получения точных решений нелинейных волновых уравнений. Он основан на построении вспомогательных линейных уравнений, где переменная $q(x)$ нелинейного уравнения играет роль параметра. Зная асимптотическое решение линейной системы, можно с помощью обратной задачи восстановить $q(x)$. Первоначально основная трудность в таком подходе заключалась в нахождении L-A пары, где оператор L относился к спектральной задаче, а оператор A определял эволюцию собственных функций Ψ во времени [1, 2].

$$L\Psi = \lambda\Psi, \tag{1}$$

$$\Psi_t = A\Psi. \tag{2}$$

Условие совместности (1) и (2) имеет вид

$$L_t + [L, A] = 0 \tag{3}$$

и содержит нелинейное эволюционное уравнение, если L и A правильно выбраны. Формула (1) обычно соответствует одномерному уравнению Шредингера.

Позднее подход (1) – (3) был модифицирован [3]. Рассматривались системы линейных уравнений первого порядка:

$$V_x = XV, \tag{4}$$

$$V_t = TV, \tag{5}$$

где v – n-мерный вектор, а X и T – $n \times n$-матрицы. Условие совместности (4), (5), эквивалентное (3), имеет вид:

$$X_t - T_x + [X, T] = 0. \tag{6}$$

Исходя из выражений для матриц X и T, в [3] строились конкретные нелинейные уравнения, в частности, уравнение Кортевега де Фриза (КдФ), нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), уравнение Синус – Гордон (СГ).

Нахождение L-A пары представляет собой частный случай общего подхода (4) – (6), реализующийся при конкретных значениях параметров. Кроме того, в рамках этого подхода, где переменные v содержат производные первого порядка, достигается максимальное упрощение, что позволяет стандартизовать построение соответствующих матриц. Такая общность и стандартность уравнений типа (4) – (5), включая их обобщения на многомерный случай и случай многих переменных, позволяет говорить о них как о матричном представлении нелинейных уравнений. Переменные последних входят в матрицы типа X и T как параметры.

В настоящей работе рассматриваются некоторые свойства матричного представления на примере 2×2 матриц

$$X = \begin{bmatrix} -i\varphi & q \\ r & i\varphi \end{bmatrix}, \; T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \tag{7}$$

где φ – собственное значение оператора X, q, r, A, B, C, D – параметры.

Условие совместности (6) для матриц (7) дает [3]:

$$\begin{cases} B_x + 2i\varphi B + 2Aq - q_t = 0 & (8a) \\ C_x - 2i\varphi C - 2Ar - r_t = 0 & (8b) \\ A_x = qC - rB, \; D = -A. & (8c) \end{cases}$$

Из соотношения (8c) следует:

$$C = (A_x + rB)/q, \tag{9}$$

тогда из (8b) имеем:

$$[qA_{xx} - (q_x + 2i\varphi q)A_x - 2Arq^2] + [q(rB)_x - (q_x + 2i\varphi q)(rB) - q^2 r_t] = 0. \tag{10}$$

Отметим, что в развитом в работах Заходи [4 – 6] методе линеаризации в теории колец была показана эквивалентность подхода к обычным нелинейным формам и формам из производных высших порядков. При наличии смешанных форм, типа соотношений (8), оказывается эквивалентным их прочтение слева направо и наоборот. Принимая во внимание [4 – 6], имеем

$$\partial_x B + i\varphi B + Aq - \partial_t q = 0 \to \begin{vmatrix} \partial_x + i\varphi & -q \\ -\partial_t + A & B \end{vmatrix} = 0 \to \begin{cases} v_{1v} = -i\varphi v_1 + qv_2 \\ v_{1t} = Av_1 + Bv_2, \end{cases} \tag{11}$$

$$\partial_x C - i\varphi C - Ar - \partial_t r = 0 \to \begin{vmatrix} \partial_x - i\varphi & -r \\ -\partial_t - A & C \end{vmatrix} = 0 \to \begin{cases} v_{2v} = rv_1 + i\varphi v_2 \\ v_{2t} = Cv_1 - Av_2. \end{cases} \tag{12}$$

Из симметрии детерминантов относительно перестановок следует, что, наряду с исходной системой уравнений в левой части (11) – (12), можно записать такую же систему:

$$\begin{aligned} &B\partial_x + i\varphi B + Aq - q\partial_t = 0, \\ &C\partial_x - i\varphi C - Ar - r\partial_t = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\partial^2_{xt} + i\varphi\partial_t + A\partial_x - i\varphi A - qC = 0, \\ &\partial^2_{xt} - i\varphi\partial_t - A\partial_x + i\varphi A - Br = 0. \end{aligned}$$

С помощью соотношений типа

$$i\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi & -q^2/\varphi \\ r^2/\varphi & -\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q \\ r \end{bmatrix} + S(q,r),$$

вытекающих из (11) – (12), можно в принципе строить матрицы (7), удовлетворяющие (6) в явном виде, исходя непосредственно из нелинейных уравнений.

Говоря о взаимосвязи нелинейных уравнений с матричным представлением X, T, необходимо подчеркнуть, что конкретным значениям A, B, C, D соответствует, вообще говоря, пара нелинейных уравнений. При этом одно условие совместности (6) не определяет однозначно уравнения. Имеется свободный параметр r. В [3] делается конкретный выбор этого параметра. После его выбора с помощью (10) может быть записано второе нелинейное уравнение.

Матричные представления и соответствующие им нелинейные уравнения можно разделить на два класса, соответственно комлексным и действительным переменным q. Рассмотрим сначала первый из них. В [3] выбор свободной переменной r проводится так, чтобы первое и второе уравнения были комплексно-сопряженными: $r = -q^*$. При этом матрица X имеет вид:

$$X = \begin{bmatrix} -i\varphi & q \\ -q^* & i\varphi \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Матрица T специфична для каждого уравнения, например:

нелинейное уравнение Шредингера

$$\begin{cases} iq_t = q_{xx} + 2q^2q^* \\ -iq_t^* = q_{xx}^* + 2qq^{*^2}, \end{cases} \quad T = \begin{bmatrix} 2i\varphi^2 - iqq^* & -2q\varphi - iq_x \\ 2q^*\varphi - iq_x^* & -2i\varphi^2 + iqq^* \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Нелинейное (порядка h) уравнение Шредингера

$$\begin{cases} iq_t = q_{xx} + 2\alpha|qq^*|^h q \\ -iq_t^* = q_{xx}^* + 2\alpha|qq^*|^h q^*, \end{cases} \quad T = \begin{bmatrix} 2i\varphi^2 - i\alpha|qq^*|^h & -2q\varphi - iq_x \\ 2q^*\varphi - iq_x^* & -2i\varphi^2 + i\alpha|qq^*|^h \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Комплексный аналог модифицированного уравнения Кортевега де Фриза

$$\begin{cases} q_t + 6qq^*q_x + q_{xxx} = 0 \\ q_t^* + 6qq^*q_x^* + q_{xxx}^* = 0, \end{cases}$$

$$T = \begin{bmatrix} -4i\varphi^3 + 2i\varphi qq^* + (qq_x^* - q_xq^*) & 4q\varphi^2 + 2i\varphi q_x - q_{xx} - 2q^2q^* \\ -4q^*\varphi^2 + 2i\varphi q_x^* + q_{xx}^* + 2qq^{*^2} & 4i\varphi^3 - 2i\varphi qq^* - (qq_x^* - q_xq^*) \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Уравнение Синус – Гордон

$$\begin{cases} u_{xt} = \sin u, \; q = +u_x/2 \\ u_{xt}^* = \sin u^*, \end{cases} \quad T = \begin{bmatrix} i\cos u/4\varphi & i\sin u/4\varphi \\ i\sin u^*/4\varphi & -i\cos u^*/4\varphi \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Уравнение Sh – Гордон

$$\begin{cases} u_{xt} = \mathrm{sh} u, \quad q = u_x/2 \\ u_{xt}^* = \mathrm{sh} u^* \quad |r| = |q^*|, \end{cases} \quad T = \begin{bmatrix} i\mathrm{ch} u/4\varphi & i\mathrm{sh} u/4\varphi \\ -i\mathrm{sh} u^*/4\varphi & -i\mathrm{ch} u^*/4\varphi \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Матрицы X и T, имеющие во всех случаях структуру

$$X = \begin{bmatrix} -i\varphi & q \\ -q^* & i\varphi \end{bmatrix}, \; T = \begin{bmatrix} A & B \\ -B^* & -A \end{bmatrix}, \tag{19}$$

могут быть записаны в виде кватернионов типа

$$ReB \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} + ImB \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \sigma_1 ReB + \sigma_2 ImB + \sigma_3 A. \tag{20}$$

Уравнения (14) – (18) являются уравнениями для амплитуд вероятности q (или Ψ в стандартных обозначениях). При выводе обычного линейного уравнения Шредингера из теории марковских процессов делается три предположения: малость приращений за малое время, эвклидовость пространства, независимость амплитуды перехода от Ψ [7]. Учет нарушения последнего предположения при выполнении первых двух упомянутых условий приводит к нелинейным уравнениям квантовой механики. Соответствующий вывод нелинейного уравнения Шредингера (14) приведен в [7]. Важный момент здесь заключается в том, что для амплитуд вероятности справедливы теоретико-групповые характеристики. В частности солитоны, описываемые уравнениями типа (14) – (18), могут быть классифицированы на основе группового подхода аналогично атомным уровням, что весьма существенно с прикладной точки зрения.

Рассмотрим второй класс уравнений с действительной переменной q. Выбор свободного параметра r проводится в [3] таким образом, что первое уравнение совпадает со вторым. Выпишем матрицы X и T для конкретных уравнений.

Уравнение Кортевега де Фриза $q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0$ $(r = -1)$:

$$X = \begin{bmatrix} -i\varphi & q \\ -1 & i\varphi \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} -4i\varphi^3 + 2i\varphi q - q_x & 4q\varphi^2 + 2i\varphi q_x - q_{xx} - 2q^2 \\ 4\varphi^2 - 2q & 4i\varphi^3 + 2i\varphi q + q_x \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Модифицированное уравнение Кортевега де Фриза $q_t + 6q^2q_x + q_{xxx} = 0$ $(r = -q)$:

$$X = \begin{bmatrix} -i\varphi & q \\ -q & i\varphi \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} -4i\varphi^3 + 2i\varphi q^2 & 4q\varphi^2 + 2i\varphi q_x - q_{xx} - 2q^3 \\ -4q\varphi^2 + 2i\varphi q_x + q_{xx} + 2q^3 & 4i\varphi^3 - 2i\varphi q^2 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Уравнение Дима $u_t = 2(u^{1/2})_{xxx}$, $r = -1$, $q = u - 1$:

$$X = \begin{bmatrix} -i\varphi & q \\ -1 & i\varphi \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{bmatrix} -4i\varphi^3 u^{-1/2} - \varphi^2 u_x u^{-3/2} & 4\varphi^3 u^{-1/2}(u-1) + 2i\varphi^2 u_x u^{-3/2} - (u^{-3/2}u_x)_x\varphi \\ -4\varphi^3 u^{-1/2} & 4i\varphi^3 u^{-1/2} + \varphi^2 u_x u^{-3/2} \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Заметим, что при выводе (23) использовались в отличие от (11), (12) уравнения $B\partial_x + i\varphi B + \varphi qA - \varphi q\partial_t = 0$, $C\partial_x - i\varphi C - \varphi rA - \varphi r\partial_t = 0$.

Во всех случаях (21) – (23) X и T соответствуют двум тождественным уравнениям благодаря соответствующему выбору r. Меняя r, можно записать для выбранного матричного представления два различных связанных нелинейных уравнения. Так, для случая КдФ при А и В, задаваемых формулой (22), и $C = (A_x + rB)/q$ второе уравнение, соответствующее (12), можно, используя (10), представить в виде

$$qq_{xxx}(r+1) - q_{xx}(q_x + rq_x + 4i\varphi q + 4i\varphi qr - qr_x) + q_x(2i\varphi q_x +$$

$$+2i\varphi rq_x - 4qr\varphi^2 - 4q\varphi^2 - 2i\varphi r_x q) - q^2(4r_x\varphi^2 - 2r_x q - r_t) = 0. \quad (24)$$

Выбирая значение r, мы полностью определяем искомую пару уравнений. С практической точки зрения такой подход открывает возможности для систематического построения стохастических нелинейных уравнений. Здесь существует прямая аналогия с обыкновенными линейными стохастическими марковскими уравнениями, которым соответствуют прямые и обратные уравнения Колмогорова для матрицы перехода. Здесь, в отличие от амплитуд вероятности, следует использовать полугруппы [8].

Мы рассматривали одномерные уравнения. При переходе к большому числу компонент или большому числу переменных возникают матрицы X и T более высокого порядка, хотя принципиальные основы матричного представления, обсуждаемые на примере 2×2 матриц, сохраняются. В этом случае классификация солитонов, описываемых уравнениями для амплитуд вероятности, дополняется пространственными групповыми характеристиками.

В целом рассматриваемый подход открывает возможности классификации и анализа физического содержания нелинейных уравнений относительно простыми средствами.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М., Мир, 1977.

[2] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М., Мир, 1988.

[3] Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М., Мир, 1987.

[4] Захеди Р. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 3-4, 78 (1997).

[5] Захеди Р. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 5-6, 68 (1997).

[6] Захеди Р. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 7-8, 50 (1997).

[7] Шелепин А. Л., Шелепин Л. А. Труды ФИАН, **218**, 3 (1994).

[8] Т и х о н о в В. А., М и р о н о в М. А. Марковские процессы. М., Советское радио, 1977.

Поступила в редакцию 21 июля 1997 г.